

---

# Stochastische Resonanz und Kohärenzresonanz in gerichteten Ringen

---

**Stochastic resonance and coherence resonance in directional rings**

Zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation von Dipl.-Phys. Johannes Peter Werner aus Alzenau i. Ufr.

Februar 2010 — Darmstadt — D 17

---



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Physik  
Institut für Festkörperphysik  
AG nichtlineare Spinwelldynamik

---

Stochastische Resonanz und Kohärenzresonanz in gerichteten Ringen  
Stochastic resonance and coherence resonance in directional rings

Genehmigte Dissertation von Dipl.-Phys. Johannes Peter Werner aus Alzenau i. Ufr.

1. Gutachten: Prof. H. Benner
2. Gutachten: Prof. B. Drossel

Tag der Einreichung: 9.02.2010

Tag der Prüfung: 26.04.2010

Darmstadt — D 17

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: [urn:nbn:de:tuda-tuprints-21353](http://nbn-resolving.org:urn:nbn:de:tuda-tuprints-21353)

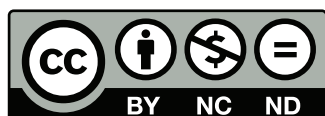
URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/2135>

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

[tuprints@ulb.tu-darmstadt.de](mailto:tuprints@ulb.tu-darmstadt.de)



Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung – Keine kommerzielle Nutzung – Keine Bearbeitung 2.0 Deutschland

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Stochastische Resonanz . . . . .	1
1.2	Kohärenzresonanz . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Ausgedehnte Systeme</b>	<b>9</b>
2.1	Aufbau des experimentellen Systems . . . . .	10
2.2	Theoretische Beschreibungen und numerische Experimente . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Charakterisierung</b>	<b>13</b>
3.1	Stabilitätsanalyse des Systems . . . . .	14
3.2	Deterministische Dynamik . . . . .	17
3.3	Stochastische Dynamik . . . . .	18
3.4	Kohärenzresonanz . . . . .	21
3.5	Dynamik unter Modulation durch externe Signale . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Stochastische Resonanz</b>	<b>25</b>
4.1	Mastergleichung . . . . .	25
4.2	Experimentelle Ergebnisse . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Ring aus vier Schmitt-Triggern</b>	<b>31</b>
5.1	Charakterisierung . . . . .	31
5.2	Kohärenzresonanz und stochastische Resonanz . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Phasenoszillatoren</b>	<b>37</b>
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>43</b>
<b>Anhang</b>		<b>45</b>
<b>A</b>	<b>Systeme mit Zeitverzögerung</b>	<b>45</b>
A.1	Deterministische Dynamik . . . . .	46
A.2	Stochastische Dynamik . . . . .	47
A.3	Kohärenzresonanz und stochastische Resonanz . . . . .	48
<b>B</b>	<b>Bifurkationsanalysen</b>	<b>51</b>
B.1	Ring aus drei Schmitt-Triggern . . . . .	51
B.2	Verallgemeinerung $d$ -dimensionaler Systeme . . . . .	54
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>57</b>



---

# Abstract

Stochastic resonance (SR) has now been investigated for thirty years. The mechanism has been postulated by Benzi et al. [1981] as a model for the periodic recurrence of ice ages. It is a counter-intuitive effect, where noise actually improves the transmission of a weak periodic signal. It has been shown that this effect can be enhanced in extended systems, e.g. by Lindner et al. [1995] (numerically) or Stemler et al. [2004] (experimentally). This phenomenon is called “array enhanced stochastic resonance” (AESR).

Another closely related effect is coherence resonance (CR), where noise can lead to the formation of coherent signals in some systems [Pikovsky and Kurths, 1997].

In this work, I present experimental investigations on stochastic resonance and coherence resonance in directionally coupled rings of bistable elements. This type of system is an important constituent of larger extended systems, such as can be encountered when modelling e.g. genetical networks (c.f. [Davidson 2006]). The directional rings can introduce periodic motion into a network consisting of otherwise quiescent components.

The systems under investigation consist of three and four elements respectively. These elements were realised with Schmitt-Triggers, simple operational amplifier circuits. While both systems exhibit completely different deterministic behaviour when the coupling is very strong – auto-oscillations can arise in rings with an odd number of elements – they both show coherence resonance as well as array enhanced stochastic resonance. A simplistic theoretical calculation can qualitatively reproduce these results.

However, under variation of the signal frequency large deviations from this theory are observed: AESR can be suppressed or enhanced for different driving frequencies. I attribute these deviations to dynamical properties of the systems under investigation. These properties, namely a directional dynamical component around the origin, are revealed by noise acting on the system. They can also be found analytically by a linear stability analysis of the systems’ fixed points.

I show that this behaviour is in fact generic and related to the directional dynamical component by comparing the results to those obtained from a simple theoretical model: a phase oscillator. It is known that this type of system can exhibit CR as well as SR. I show numerically that when driving the system with a periodic signal compatible to the system’s noise induced timescale SR can be significantly enhanced.



---

# 1 Einleitung

Stochastische Resonanz ist seit dreißig Jahren bekannt. Der Mechanismus ist erstmals von Benzi u. a. [1982] postuliert worden, um das periodische Auftreten der Eiszeiten zu erklären. Es ist ein kontraintuitiver, aber dadurch auch faszinierender Effekt, bei dem Rauschen die Signalübertragung verbessern kann. Dieser Effekt kann durch endliche Kopplung mehrerer Einzelelemente verbessert [Stemler u. a., 2004] oder unterdrückt [Palacios u. a., 2006] werden. In vielen Systemen, die aktueller Gegenstand der Forschung sind, wie z. B. neuronalen oder Gen-Netzwerken, finden solche fluktuationsgetriebene Prozesse statt. Daher ist es wichtig, diese genau zu verstehen. Häufig wird das Antwortverhalten dieser Systeme nur über die Mittelwerte modelliert, es gibt jedoch theoretische Untersuchungen, z. B. von Rozenfeld und Schimansky-Geier [2000], die zeigen, dass dabei wichtige Informationen verlorengehen. Um die Funktionsweise großer ausgedehnter Systeme mit vielen Elementen zu begreifen, kann man diese in Funktionsgruppen, die miteinander wechselwirken können, zerlegen. Ich untersuche in dieser Arbeit daher experimentell das Verhalten von gerichtet gekoppelten Ringen, die ein wichtiger Typ von ausgedehnten Systemen sind.

In den folgenden Abschnitten beschreibe ich zunächst die von mir untersuchten Effekte, nämlich stochastische Resonanz (Kap. 1.1) und Kohärenzresonanz (Kap. 1.2). In Kapitel 2 präsentiere ich die hier untersuchten Kopplungsgeometrien, die dann im darauf folgenden Kapitel für einen Fall genauer charakterisiert werden. Das Kapitel 4 zeigt, wie stochastische Resonanz im hier untersuchten System auftreten kann. Hier stelle ich auch dar, welcher Mechanismus bei verbesserter stochastischer Resonanz in ausgedehnten Systemen eine Rolle spielen kann und wodurch Abweichungen von einer einfachen theoretischen Überlegung verursacht werden.

Im weiteren Verlauf der Arbeit (Kap. 5) untersuche ich ein zweites System mit unterschiedlichem deterministischem dynamischen Verhalten. Auch dort finde ich ähnliche Ergebnisse wie im ersten System. Über die Gemeinsamkeiten der beiden Systeme schließe ich auf den zu Grunde liegenden Mechanismus der beobachteten Effekte.

Die in den verschiedenen Experimenten gewonnenen Erkenntnisse fließen schließlich in Kapitel 6 ein. Die dort vorgenommene drastische Vereinfachung der Systeme erlaubt es mir, den verantwortlichen Mechanismus zu identifizieren. Die Ergebnisse bestätigen die in den vorhergehenden Kapiteln von mir gezogenen Schlüsse.

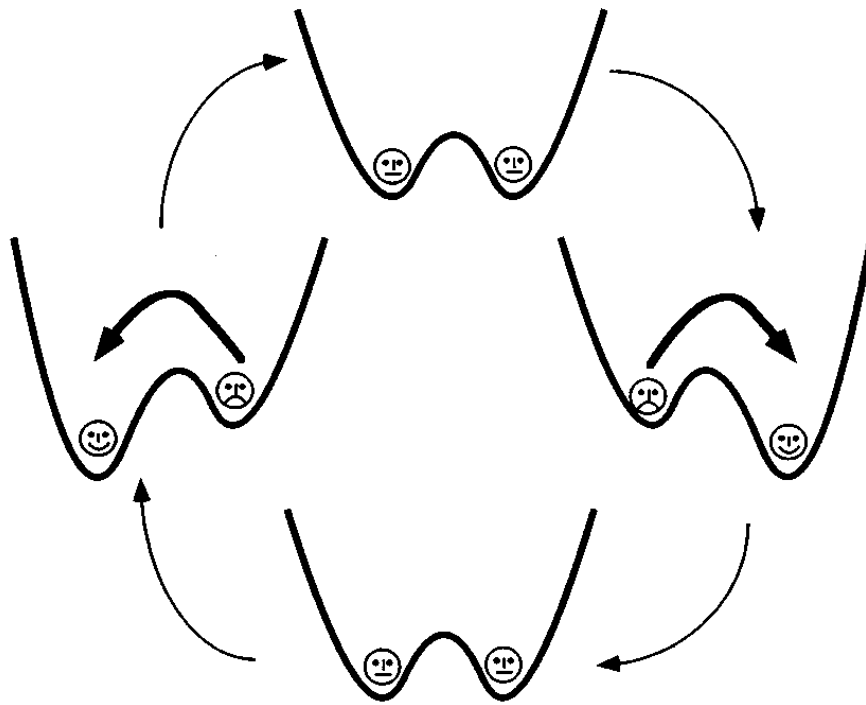
---

## 1.1 Stochastische Resonanz

---

Stochastische Resonanz ist ein Effekt, der unserer Alltagserfahrung widerspricht: Die Übertragung eines schwachen Signals kann durch Rauschen tatsächlich verbessert werden. Normalerweise werden bei der Signalübertragung, egal in welchem Bereich, große Anstrengungen unternommen, um das unerwünschte Rauschen möglichst zu unterdrücken. Im Gegensatz dazu kommt es im Falle stochastischer Resonanz bei einer nichtverschwindenden Rauschstärke zu einer besonders guten Signalübertragung.

Der Effekt wurde erstmals Anfang der Achtzigerjahre des vorigen Jahrhunderts untersucht, um den periodischen Wechsel zwischen Eiszeiten und Warmperioden zu erklären [Benzi u. a., 1981, 1982]. Hierbei wurde angenommen, dass es im Erdklima zwei stabile Zustände gibt (warm und kalt), zwischen denen durch Fluktuationen hin- und hergewechselt werden kann. Die Fluktuationen stellen das normale Wettergeschehen, Jahreszeitenwechsel, aber auch Extremereignisse (z. B. Phänomene wie *El Niño* oder Vulkanausbrüche) dar. Die kleinen periodischen Änderungen der Exzentrizität der Erdumlaufbahn können einen der beiden Zustände bevorzugen. Dadurch steigt die Wahrscheinlichkeit, zu einem bestimmten



**Abbildung 1.1.:** Verlauf des modulierten Doppelmuldenpotentials über eine Periodendauer des Antriebs-signals: Die Mimik der Smileys zeigt den bevorzugten Zustand. Wenn das Rauschen so eingestellt wird, dass Sprünge aus der höheren Mulde in die niedrigere wahrscheinlich sind, aber nicht in umgekehrte Richtung, beobachtet man stochastische Resonanz. Aus: [Gammaitoni u. a., 1998]

Zeitpunkt einen bestimmten klimatischen Zustand vorzufinden. Mittlerweile hat man stochastische Resonanz in vielen Systemen gefunden, von elektronischen Systemen [Fauve und Heslot, 1983; Anishchenko u. a., 1992; Werner u. a., 2008; Jüngling u. a., 2008] über Lasersysteme [Barbay u. a., 2001], ferromagnetische [Reibold u. a., 1997] und ferroelektrische [Diestelhorst, 2005] Systeme bis hin zu chemischen Reaktionen [Leonard und Reichl, 1994] und komplizierten biologischen Systemen [Russell u. a., 1999; Bulsara u. a., 1991]; ja sogar in der Sinnesphysiologie des Menschen (z.B. im Tastsinn [Collins u. a., 1997], und der optischen Wahrnehmung [Simonotto u. a., 1997]) und in Gehirnströmen [Mori und Kai, 2002] wurde sie nachgewiesen.

Das weit verbreitete Auftreten dieses Effekts ist nicht weiter verwunderlich, da nur drei Zutaten benötigt werden: ein bi- oder multistabiles System (wobei es ausreichend ist, dynamische Bistabilitäten zu haben [Reibold u. a., 1997]), ein schwaches Signal sowie Rauschen der passenden Stärke. Ist das Rauschen zu schwach, findet man nur sehr wenige Zustandswechsel im System. Ist das Rauschen zu stark, so werden die Zustandswechsel stochastisch auftreten. Bei einer bestimmten, nichtverschwindenden Rauschstärke beobachtet man jedoch Sprünge, die dem angelegten Signal folgen.

Gammaitoni u. a. [1998] geben folgende anschauliche Erklärung: In einem Doppelmuldenpotential befindet sich eine Punktmasse, die dort gedämpfte Bewegungen ausführen kann. Die Masse ist an ein Wärmebad (oder eine andere Quelle von Fluktuationen) gekoppelt und kann, je nach Stärke der Fluktuationen, Sprünge über die trennende Potentialbarriere durchführen. Wird ein periodisches Signal auf das Potential gegeben, so werden die beiden Mulden abwechselnd gegeneinander verkippt (vgl. Abb. 1.1). Stellt man die Stärke der Fluktuationen so ein, dass Sprünge aus der



oberen Mulde mit hoher Wahrscheinlichkeit geschehen, aber die Fluktuationen gleichzeitig so schwach sind, dass es unwahrscheinlich ist, aus der tiefer liegenden Mulde in die höhere zu wechseln, so synchronisieren die Sprünge des Teilchens im Mittel auf das Antriebssignal. Es finden im Mittel zwei Sprünge pro Periodendauer  $T_m$  statt. Stochastische Resonanz ist also ein Effekt, der bei Anpassung der Zeitskala des antreibenden Signals  $T_m$  zur stochastisch erzeugten Zeitskala des Systems, der mittleren Verweilzeit in einem Zustand  $\langle T \rangle$ , auftritt. Diese Bedingung wird in der Literatur als *time-scale matching condition* (etwa: Zeitskalenanpassungsbedingung) bezeichnet und entspricht ungefähr der Resonanzbedingung in deterministischen Systemen. Die stochastische Zeitskala übernimmt hier die Rolle der Eigenfrequenz bzw. Eigenzeit eines deterministischen Systems.

Stochastische Resonanz in Netzen von Systemen spielt in der aktuellen Forschung eine wichtige Rolle. Vor allem in Bereichen, bei denen man viele miteinander verknüpfte Einzelelemente hat, die von sich aus stochastische Resonanz zeigen können, ist es wichtig, das Systemverhalten des Netzes zu untersuchen. Die in größeren Systemen vorhandene Zeitverschiebung bietet außerdem noch einen weiteren, wichtigen Parameter. Es wird bereits von Lindner u. a. [1995] numerisch gezeigt, dass stochastische Resonanz durch die raum-zeitliche Kopplung von Elementen in ausgedehnten Systemen gegenüber dem Einzelelement verstärkt werden kann. Dieser Effekt wird dort als *array enhanced stochastic resonance* (in etwa: verbesserte stochastische Resonanz durch Kopplung) bezeichnet. In gerichteten Ringen kann dieser Effekt auftreten, wie Stemler u. a. [2004] experimentell zeigt. Im Gegensatz dazu findet man in der Arbeit von Palacios u. a. [2006] keinen Hinweis auf verbesserte stochastische Resonanz im dort untersuchten ausgedehnten System.

Um diese Diskrepanz näher zu untersuchen, werde ich diese Experimente erneut betrachten und erweitern, die entsprechenden Systeme analysieren und die gewonnenen Ergebnisse verallgemeinern. Eine Herausforderung bei diesen Untersuchungen ist die große Zahl von Parametern, die die Systeme haben. Neben den Eigenschaften der einzelnen Elemente und der Kopplungsgeometrie zwischen diesen spielen auch Signallaufzeiten und die Eigenschaften der angekoppelten lokalen oder globalen Signale eine Rolle. Eine gezielte Auswahl von Parametern ist daher wichtig, um nicht den Überblick über die betrachtete Fragestellung zu verlieren.

---

### 1.1.1 Maße für stochastische Resonanz

---

Um stochastische Resonanz zu quantifizieren, werden viele unterschiedliche Maße verwendet, da sie sensitiv gegenüber unterschiedlichen Aspekten sind. So gibt es spektrale Maße, die die Leistungsübertragung bei einer bestimmten Frequenz messen, Informationsmaße, die die Informationsübertragung durch ein System messen, Verweildauermaße, die die zeitliche Regelmäßigkeit eines Signals bestimmen und auch Synchronisationsmaße, die den funktionalen Zusammenhang zwischen Signal und Antwort auswerten. In dieser Arbeit verwende ich ausschließlich die Kreuzkorrelationsfunktion, die nicht nur die zeitliche Ähnlichkeit zweier Signale beschreibt, sondern auch den Vorteil hat, dass sie auch auf nichtperiodische Signale angewendet werden kann. Die Kreuzkorrelationsfunktion zwischen zwei Signalen  $x(t), y(t)$  ist definiert als:

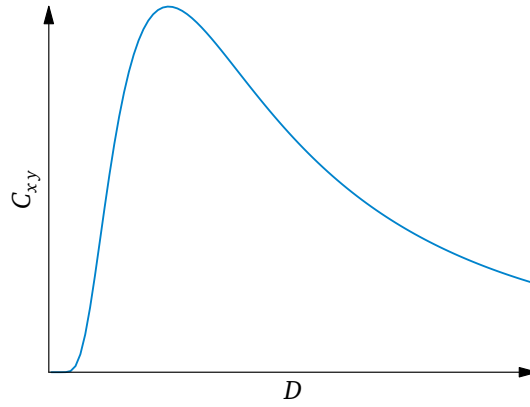
$$C_{xy}(\Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt x^*(t) \cdot y(t + \Delta t) \quad (1.1)$$

Sie kann nach dem Wiener-Khintchine-Theorem über die Fouriertransformation berechnet werden:

$$C_{xy} = \mathcal{F}^{-1} (\mathcal{F}^*(x) \mathcal{F}(y)) \quad (1.2)$$

Der numerische Aufwand der zweiten Methode wächst nicht so schnell mit der Länge der Zeitreihen wie bei der ersten Methode. Deshalb habe ich mich für die Berechnung auf diese Weise entschieden.

Ein weiteres, häufig verwendetes Maß für stochastischen Resonanz ist die Verteilung der Verweildauern. Im untersuchten System werden die Zeiten gemessen, die für einen Zustandswechsel nötig sind.



**Abbildung 1.2.:** Abhängigkeit der Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion (1.8) von der Rauschstärke  $D$ .

Aus langen Zeitreihen wird so eine Häufigkeitsverteilung erstellt, die als Abschätzung für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Ereignisse dient. Interessant ist vor allem die Verweildauer, die der halben Periodendauer des Eingangssignals entspricht. Wenn das System dem Eingangssignal folgt, so finden die meisten Zustandswechsel etwa nach dieser Verweildauer statt. Es bildet sich in der Verweildauerverteilung ein Peak heraus, dessen Höhe als Maß für stochastische Resonanz verwendet werden kann.

### 1.1.2 Kurze theoretische Beschreibung des Effektes

Um stochastische Resonanz zu beschreiben, kann man sich verschiedener Methoden bedienen. Zum einen kann man versuchen, die zu Grunde liegende zeitabhängige Fokker-Planck-Gleichung zu lösen, zum anderen reicht es häufig aus, eine sogenannte Mastergleichung zu betrachten. Beide sind Sonderfälle der differentiellen Form der Chapman-Kolmogorov-Gleichung [Risken, 1989], die die zeitliche Evolution von Wahrscheinlichkeitsdichten beschreibt. Die Fokker-Planck-Gleichung betrachtet zeitlich kontinuierliche Änderungen der Prozesse, die Mastergleichung wird auf Sprungprozesse angewendet.

Da ich mich in dieser Arbeit vorwiegend mit Sprungsystemen beschäftige, werde ich im Folgenden nur die Beschreibung der stochastischen Resonanz über die Mastergleichung vorstellen. Hierbei, und auch im Rest der Arbeit, halte ich mich an die von McNamara und Wiesenfeld [1989] verwendete Notation.

Ein System habe nur die Zustände  $x_+$  und  $x_-$ . Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in diesen Zuständen sei  $n_+$  bzw.  $n_-$ . Die zeitliche Änderung dieser Aufenthaltswahrscheinlichkeiten ist dann durch

$$\dot{n}_+ = w_- n_- - w_+ n_+ \quad (1.3a)$$

$$\dot{n}_- = w_+ n_+ - w_- n_- \quad (1.3b)$$

gegeben, wobei  $w_{\pm}$  die Übergangswahrscheinlichkeiten aus dem jeweiligen Zustand sind. Dies lässt sich (wegen  $n_+ + n_- = 1$ ) auch in der Form

$$\dot{n}_+ = w_- - (w_+ + w_-) n_+ \quad (1.4)$$

schreiben. Integration dieser Gleichung führt zu

$$n_+(t) = g(t, t_0) n_+(t_0) + \int_{t_0}^t dt' g(t, t') w_-(t') \quad \text{mit:} \quad g(t, t_0) = \exp \left( - \int_{t_0}^t dt' (w_+(t') + w_-(t')) \right) \quad (1.5)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten  $w_{\pm} = w(\mu \pm s(t))$  werden jetzt nach der Änderung des Kontrollparameters  $\mu$  durch das Signal  $s(t)$  entwickelt:

$$w(\mu \pm s(t)) = \sum_n \underbrace{\frac{1}{n!} \frac{d^n w}{d\mu^n}(\mu)}_{\alpha_n} \cdot (\pm s(t))^n \quad (1.6)$$

Ich betrachte nur Terme bis zur ersten Ordnung. Daraus ergibt sich  $g(t) = \exp(\alpha_0(t - t_0))$  und für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im eingeschwungenen Zustand (im Grenzfall  $t \rightarrow -\infty$ ) und für ein periodisches, sinusförmiges Eingangssignal  $s(t) = s \cdot \cos(\omega_m t)$ :

$$n_+(t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\alpha_1 s(t)}{(\alpha_0^2 + \omega_m^2)^{1/2}} \right) \quad (1.7)$$

Jetzt bilde ich die Kreuzkorrelation zwischen dem Eingangssignal  $s(t)$  und dem Ausgangssignal  $x(t)$ , das ich über die Besetzungswahrscheinlichkeiten  $n_{\pm}(t)$  und die Systemamplitude  $x$  berechne. Die Amplitude der normierten Kreuzkorrelationsfunktion lautet:

$$C_{xs} = \frac{\alpha_1 s}{\sqrt{\omega^2 + \alpha_0^2}} \quad (1.8)$$

Der Verlauf dieser Funktion ist in Abbildung 1.2 skizziert. Als Übergangsraten habe ich einen Verlauf ähnlich der Kramersrate [H. A. Kramers, 1940] angenommen:

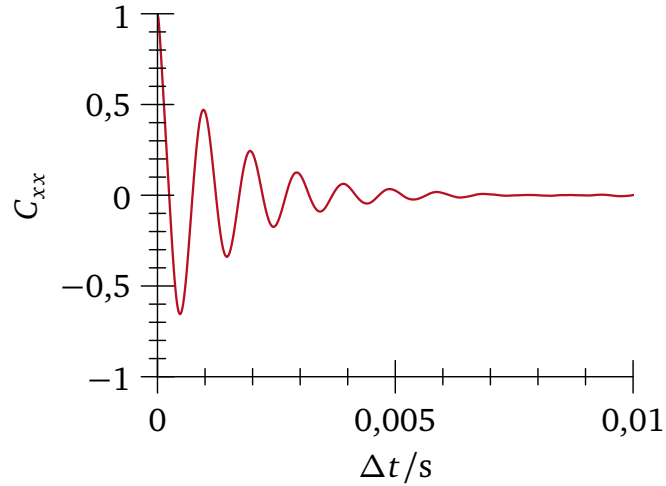
$$\alpha_0(\mu) = A \exp \left( -\frac{\Delta V(\mu)}{D} \right), \quad (1.9)$$

wobei die Proportionalitätskonstante  $A$  von der Form des Potentials und der Dämpfung abhängt und  $D$  die Stärke des Rauschen ist. Die Potentialbarriere  $\Delta V$  hängt durch die Modulation des Kontrollparameters  $\mu$  von der Zeit ab. Für relativ schwaches Rauschen ist die Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion recht klein, erreicht aber bei Erhöhung der Rauschstärke  $D$  bald ein Maximum. Wird das Rauschen noch weiter erhöht, so wird auch die Korrelation zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal wieder kleiner.

## 1.2 Kohärenzresonanz

Kohärenzresonanz ist das spontane Auftreten von kohärenter Dynamik eines Systems unter stochastischer Anregung [Pikovsky und Kurths, 1997]. Sie tritt unter anderem in Systemen auf, in denen die stochastische Anregung einen Aktivierungsprozess treibt, auf den dann ein Reinjektionsprozess folgt, wie z. B. im FitzHugh-Nagumo Modell [Pikovsky und Kurths, 1997] oder in Systemen mit Zeitverzögerung [Masoller, 2002], bei denen die Zeitverzögerung die Rolle des Reinjektionsprozesses übernimmt. Es werden also zwei Zeitskalen im System benötigt, die auf unterschiedliche Weise vom Rauschen abhängen müssen.

Das einfachste Modell, das Kohärenzresonanz zeigt, stelle ich in Kapitel 6 vor. Es handelt sich hierbei um einen einzelnen Phasenoszillator, der zyklisch auf einem Intervall definiert ist. Das auf diesem Intervall definierte Potential besitzt ein lokales Minimum und ein lokales Maximum. Kohärenzresonanz tritt in diesem System dann auf, wenn die Aktivierungszeit aus der Potentialmulde sehr klein wird, aber die Fluktuationen der Diffusionszeit noch klein sind.



**Abbildung 1.3.:** Autokorrelationsfunktion  $C_{xx}$  eines Signals.

### 1.2.1 Maße für Kohärenzresonanz

Es gibt für Kohärenzresonanz eine Vielzahl verschiedener Maße, die bei unterschiedlichen Prozessen sinnvoll angewendet werden können. Ich werde im Folgenden die beiden Maße vorstellen, die ich in dieser Arbeit verwende. Das ist zum einen die Autokorrelationszeit eines Signals, zum anderen die normierte Standardabweichung der Verweildauerverteilung. Bei der Bestimmung der Autokorrelationszeit gibt es verschiedene Methoden, die zu leicht unterschiedlichen Ergebnissen führen können, je nachdem, was für Eigenschaften das ausgewertete Signal hat. Zuerst wird meistens die Autokorrelationsfunktion des Signals ausgewertet.

$$C_{xx}(\Delta t) = \frac{\langle x(t)x(t + \Delta t) \rangle}{\langle x^2 \rangle} \quad (1.10)$$

Alternativ kann sie, wie oben die Kreuzkorrelationsfunktion, über eine Fouriertransformation berechnet werden. Vom numerischen Standpunkt her ist diese Methode zu bevorzugen, da die Zahl der Rechenschritte mit der Länge der Zeitreihe nicht so schnell anwächst. Eine Autokorrelationsfunktion ist exemplarisch in Abbildung 1.3 dargestellt. Das hier analysierte Signal ist ein fast periodisches Rechtecksignal mit einer Periodendauer von ca. 1 ms. Dadurch hat die Autokorrelationsfunktion ebenfalls eine periodische Komponente. Durch die Unregelmäßigkeiten im Signal klingt die Autokorrelationsfunktion etwa exponentiell ab. Eine mögliche Definition der Autokorrelationszeit ist der Zeitpunkt, an dem die exponentielle Einhüllende, die über eine Hilbert-Transformation berechnet werden kann, auf den Wert  $e^{-1}$  abgefallen ist.

In dieser Arbeit verwende ich das Integral über die Autokorrelationsfunktion [Pikovsky und Kurths, 1997] als Abschätzung für die Korrelationszeit  $t_{corr}$ . Diese normiere ich auf die charakteristische Zeitskala des Signals, um die Ergebnisse für unterschiedliche Parameterwerte miteinander vergleichen zu können. Dadurch erhalte ich eine Abschätzung für die Kohärenz des Signals in Periodendauern.

Eine andere Möglichkeit ist die Betrachtung der Verweildauerverteilung in einem Zustand. Hierbei messe ich die Zeit, die das System braucht, um den aktuellen Zustand zu verlassen und den Reinjektionsprozess zu durchlaufen. Wählt man das Rauschen so, dass die Aktivierung aus dem statischen Zustand in den Reinjektionsprozess schnell erfolgt aber der Reinjektionsprozess noch von deterministischer Dynamik beherrscht wird, sieht man in den Verweildauern hauptsächlich die Reinjektionszeit. Die Verteilung der Verweildauern hat durch die Fluktuationen eine endliche Breite. Die relative Brei-

---

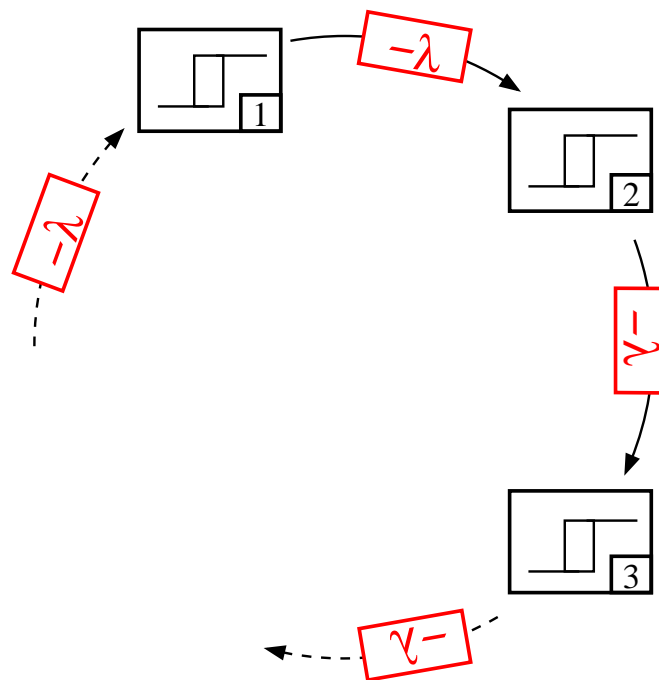
te der Verweildauerverteilung [Pikovsky und Kurths, 1997] kann man als Maß für Kohärenzresonanz nehmen.

$$R = \frac{\langle T^2 \rangle^{1/2}}{\langle T \rangle} \quad (1.11)$$

Dieses Maß versagt allerdings beim Auftreten komplizierterer Signale [Beck, 2009], bei denen eine kurze Zufallssequenz periodisch wiederholt wird. Dies ist zwar nur bei einem Teil der hier durchgeführten Experimente wichtig, trotzdem verwende ich, wann immer es möglich ist, die Autokorrelationszeit als Maß für Kohärenzresonanz.



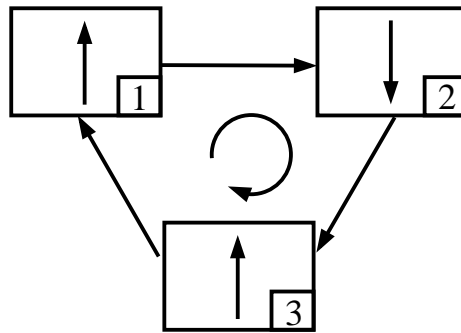
## 2 Ausgedehnte Systeme



**Abbildung 2.1.:** Ring bistabiler Elemente  $(1, 2, \dots)$ , die untereinander unidirektional und invertierend mit der variablen Kopplungsstärke  $-\lambda$  gekoppelt sind.

Wie in der Einleitung im Abschnitt über stochastische Resonanz angedeutet, kann man in Systemen, die aus mehreren Elementen bestehen, kollektive Effekte beobachten, die über die in Einzelsystemen auftretenden hinausgehen. Die Art der Elemente, ihre Kopplung und räumliche Anordnung sind neben der Anzahl der Elemente wichtige Parameter, die das Verhalten des Gesamtsystems grundlegend beeinflussen. In der hier vorgelegten Arbeit habe ich mich auf ringförmige Anordnungen mit gerichteter (unidirektionaler) Kopplung konzentriert. Im Folgenden werde ich zunächst die Geometrie der Systeme sowie das Verhalten der einzelnen Elemente beschreiben, bevor ich dann nacheinander die experimentelle Realisierung, die theoretische Beschreibung und die numerische Implementierung vorstelle.

Die betrachteten Elemente sind bistabil, sie können also nur zwei Zustände einnehmen. Das Umschalten zwischen den beiden Zuständen wird durch die auf das Element wirkenden Signale bestimmt. Mehrere dieser Elemente werden miteinander gekoppelt und bilden so zusammen das untersuchte System. Die hier untersuchte Kopplung ist *gerichtet* und im Experiment auch immer *invertierend*. Die Elemente bilden zusammen einen gerichteten Ring. Solche Systeme sind z. B. bei Booleschen Netzwerken [Norrell u. a., 2007], mit denen regulatorische Gennetzwerke modelliert werden können [Davidson, 2006], oder biologischen Uhren (Repressilatoren) [Garcia-Ojalvo u. a., 2004] zu finden. Die Struktur ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Durch die invertierende Kopplung zwischen den Elementen stellt sich bevorzugt eine alternierende Ordnung der einzelnen Elemente ein. Besteht das System aus einer geraden Anzahl kann es vollständig geordnet werden. Bei einer ungeraden Anzahl von Elementen entsteht eine Störung, eine „Frustration“, die entscheidenden Einfluss auf die Systemdynamik hat. Diese Situation ist für ein System aus drei Elementen in Abbildung 2.2 dargestellt. Die Zustände der einzelnen Elemente sind dort



**Abbildung 2.2.:** System mit drei invertierend und unidirektional gekoppelten Elementen. Die Pfeile zwischen den Elementen deuten die gerichtete Kopplung an, die Pfeile in den Elementen die bevorzugte alternierende Anordnung der Elemente. Zwischen dem ersten und dritten Element liegt eine Frustration vor, da das System bei einer ungeraden Zahl von Elementen nicht vollständig alternierend geordnet sein kann.

durch Pfeile angedeutet. Die Frustration liegt in dieser Abbildung zwischen dem dritten und dem ersten Element vor (beide im Zustand  $\uparrow$ ).

## 2.1 Aufbau des experimentellen Systems

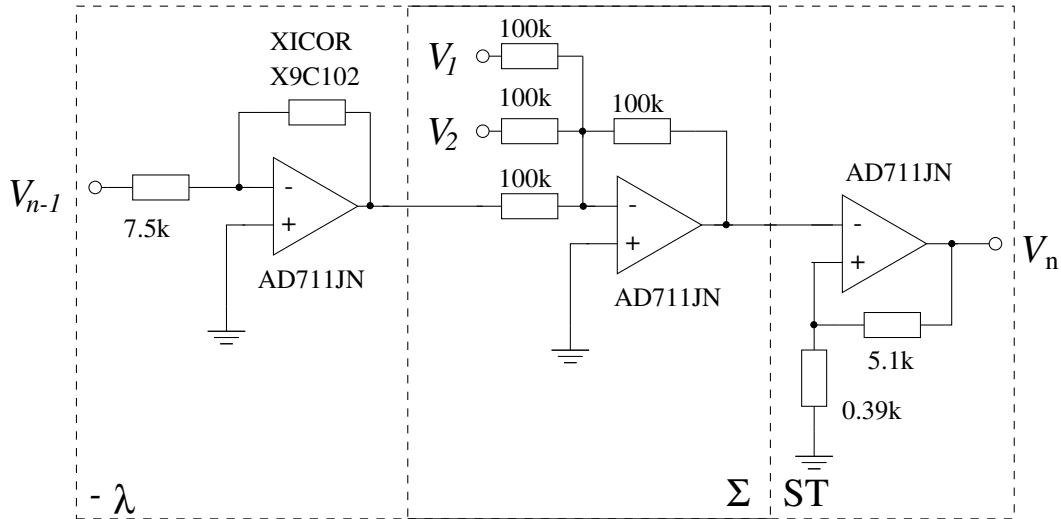
Im Experiment habe ich die Elemente mit Schmitt-Triggern realisiert, die seit Mitte der Achtzigerjahre des vorigen Jahrhunderts [Fauve und Heslot, 1983] soetwas wie die „Fruchtfliege“ der stochastischen Resonanz sind. Sie sind relativ einfach mit normalen Operationsverstärkern umzusetzen und zeigen ein bistabiles, fast diskretes Verhalten. Die beiden stabilen Zustände entsprechen der negativen bzw. positiven Sättigungsspannung des Operationsverstärkers. Der Schaltplan ist in Abbildung 2.3 sizziert. Der Eingang des Schmitt-Triggers wird mit einem Summierer (in der Abbildung mit  $\Sigma$  bezeichnet) beschaltet, der verschiedene Eingangssignale addiert und an den Schmitt-Trigger weitergibt. Die Kopplungsstärke  $\lambda$  wird über einen variablen invertierenden Verstärker eingestellt. Nicht dargestellt sind die Schaltungen zum Aus- und Einkoppeln der Signale sowie zur Ansteuerung des Experiments.

Die Schaltgeschwindigkeit des Schmitt-Triggers ist von der Schaltgeschwindigkeit (engl.: *slew rate*)  $\beta$ , die die maximale zeitliche Spannungsänderung am Ausgang des Operationsverstärkers beschreibt, und der Leerlaufverstärkung  $A$ , die ein Operationsverstärker ohne Rückkopplung alleine im Differenzbetrieb ohne Lastwiderstand hat, abhängig. Der verwendete Operationsverstärker ist ein AD711JN [Analog Devices, 2009], die Systemparameter sind typischerweise  $\beta = 16\text{V}/\mu\text{s}$  und  $A = 400$ . Dadurch wird die Bandbreite des Systems auf ca. 200 kHz beschränkt. Es zeigt sich, dass die Schaltgeschwindigkeit einen entscheidenden Einfluss auf die beobachteten Effekte hat, weshalb das System nicht ohne weiteres als rein diskretes System modelliert werden kann.

## 2.2 Theoretische Beschreibungen und numerische Experimente

Im Verlauf dieses Abschnitts stelle ich die bei der Berechnung und Simulation des Systems verwendeten Gleichungen und Algorithmen kurz vor. Für bistabile Systeme wird im Bereich der stochastischen Resonanz häufig ein biquadratisches Potential als Modell herangezogen. Dieses Potential hat den Vorteil, dass sich viele charakteristische Größen wie stationäre Verteilungen und Übergangsraten analytisch berechnen lassen. Eine andere Vereinfachung ist die Reduzierung der Dynamik auf ein Zwei-Zustandssystem mit schnellen Zustandswechseln. Beide Modelle geben das Verhalten des Schmitt-Triggers jedoch nur





**Abbildung 2.3.:** Schaltplan eines einzelnen Elements. Eine Einheit besteht aus einem Schmitt-Trigger (ST), einem variablen Verstärker  $\lambda$ , der die Kopplungsstärke regelt, und einem Addierer  $\Sigma$ , der das Signal des vorhergehenden Elements zu zwei beliebigen Eingangssignalen addiert.

unzureichend wieder. Daher greife ich auf eine etwas kompliziertere Gleichung zurück. Nach McNamara und Wiesenfeld [1989] lassen sich die einzelnen Elemente durch die Differentialgleichung

$$\dot{x} = -\beta \left[ x - \tanh\left(A(\gamma x + s(t))\right) \right] \quad (2.1)$$

beschreiben. Hierbei sind  $\beta$ ,  $A$  die Schaltgeschwindigkeit (engl. *slew rate*) und die Leerlaufverstärkung des verwendeten Operationsverstärkers,  $\gamma$  ist die Schwellenspannung des Systems. Die Variable  $s(t)$  beschreibt ein beliebiges Signal, das auf das System wirkt. Mein experimentelles System wird also durch das System von gekoppelten Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = -\beta \left[ x_i - \tanh\left(A(\gamma x_i + \lambda x_{i-1} + s(t))\right) \right] ; i = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

beschrieben, wobei die Variablen  $x_i, x_{i-1}$  die (auf die Sättigungsspannung des Operationsverstärkers normierte) Ausgangsspannung des  $i$ -ten bzw.  $(i - 1)$ -ten Elements sind.

An der Stelle  $s(t)$  wird nicht nur ein deterministisches Signal eingekoppelt, sondern auch Rauschen, also zufällige Fluktuationen. Da das im Experiment verwendete Rauschen begrenzte Bandbreite hat, beschreibe ich es durch einen Ornstein-Uhlenbeck Prozess:

$$dy = -ky dt + dW_t \quad (2.3)$$

Das Inkrement  $dW_t$  ist die Erzeugende eines sogenannten Wiener-Prozesses, es handelt sich um normalverteilte Inkremente mit Mittelwert Null.

Eine stochastische Differentialgleichung für die Variable  $x \in \mathbb{R}^d$  kann in der Form

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)dW_t \quad (2.4)$$

geschrieben werden. Die Gleichung wird also in einen rein deterministischen Term  $f(x, t) \in \mathbb{R}^d$  und den stochastischen Term  $g(x, t) \in \mathbb{R}^{d \times n}$  zerlegt. Ist der zweite Term räumlich konstant, spricht man von additivem Rauschen. Es gilt  $d \geq n$ , die Dimension des stochastischen Anteils ist immer kleiner oder gleich der des deterministischen Anteils. Der Fall  $d < n$  lässt sich auf  $d = n$  abbilden [Kloeden und Platen,

---

1992]. Die Wiener-Inkremente bilden hier einen  $n$ -dimensionalen Vektor. Die einzelnen Einträge sind voneinander stochastisch unabhängig. Das Differentialgleichungssystem des Experiments, bestehend aus den Gleichungen (2.2) und (2.3), lässt sich auch in der Form (2.4) schreiben. Das Ergebnis ist bei drei Elementen und lokalem Rauschen eine sechsdimensionale stochastische Differentialgleichung.

Zur numerischen Analyse der stochastischen Differentialgleichungen habe ich einen numerischen Löser (*solver*) in C++ implementiert. Meine Wahl ist auf das Euler-Maruyama-Verfahren gefallen, bei dem ein einfacher Euler-Algorithmus durch eine stochastische Komponente ergänzt wird. Ich habe mich für dieses Verfahren entschieden, obwohl es eine niedrigere Konvergenzordnung ( $1/2$ ) hat als andere Verfahren. Bei der Bestimmung der Konvergenzordnung wird allerdings nicht berücksichtigt, dass bei den Verfahren höherer Ordnung (z. B. dem Milstein-Verfahren) stochastische Integrale gelöst werden müssen. Da das analytisch häufig nicht möglich ist, müssen diese numerisch genähert werden. Dadurch reduziert sich die effektive Konvergenzordnung wieder auf die des Euler-Maruyama-Verfahrens [Kloeden und Platen, 1992]. Bei additivem Rauschen sind Milstein- und Euler-Maruyama-Verfahren identisch, die Konvergenzordnung beträgt 1.

Die stochastische Differentialgleichung wird in zwei Teile zerlegt, einen deterministischen und einen stochastischen. Dann wird das Inkrement  $\Delta x$  berechnet:

$$\Delta x = f(x, t) \Delta t + g(x, t) \Delta W_t \quad (2.5)$$

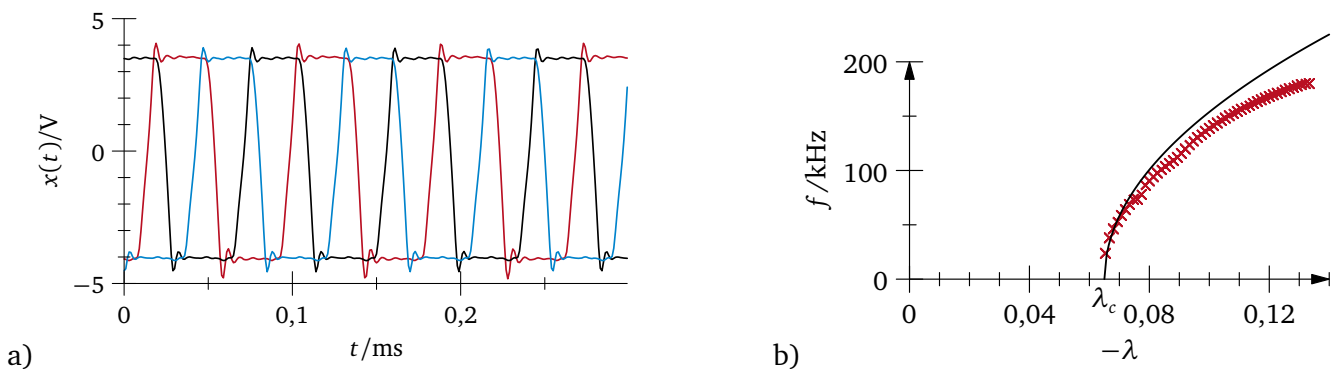
Diese Inkremente werden aufaddiert. Die Schrittweite  $\Delta t$  kann entweder konstant bleiben oder variabel sein. Die Wiener-Inkremente  $\Delta W_t$  sind stochastisch unabhängig voneinander  $\langle \Delta W_t \cdot \Delta W_{t'} \rangle = \delta(t, t')$  und normalverteilt  $\Delta W_t \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$  mit dem Mittelwert Null und der Varianz  $\Delta t$ .

### 3 Charakterisierung

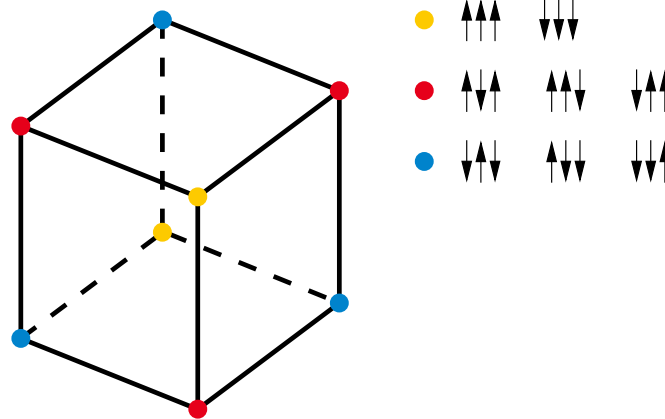
In den folgenden beiden Kapiteln beschäftige ich mich mit einem gerichteten Ring aus drei Elementen. Durch die oben angesprochene „Frustration“ des Systems kann es zu Autooszillationen kommen, wenn die Kopplungsstärke einen bestimmten kritischen Wert  $\lambda_c$  überschreitet. Dann schaltet das Element, bei dem die Störung vorliegt, in den bevorzugten Zustand um, daraufhin sein Nachfolger, und die Störung wandert um den Ring herum. Die Frequenz der Autooszillationen ist auf der einen Seite von den Systemparametern des Schmitt-Triggers abhängig (nämlich der *slew rate* und der Leerlaufverstärkung), auf der anderen Seite jedoch auch von der Kopplungsstärke und darüber hinaus auch von der Zahl der Elemente, vgl. dazu [Bulsara u. a., 2004], was hier allerdings nicht untersucht wird. Betrachtet man die Oszillationen benachbarter Elemente, so stellt man fest, dass sie um  $120^\circ$  phasenverschoben sind. Diese Verschiebung resultiert aus den periodischen Randbedingungen. Eine typische Zeitreihe ist in Abbildung 3.1a dargestellt. Erhöht man die Kopplungsstärke, so steigt auch die Frequenz der Oszillationen, und zwar näherungsweise proportional zur Wurzel des Abstands von der kritischen Kopplungsstärke  $f \propto \sqrt{\lambda_c - \lambda}$ . Dieses Verhalten sieht man in Abbildung 3.1b. Drei Bereiche sind erkennbar: Im ersten Bereich ( $\lambda > \lambda_c$ ) finden noch keine Autooszillationen statt, kurz oberhalb des Bifurkationspunkts folgt die Oszillationsfrequenz in etwa dem erwarteten Verhalten, die Abweichungen (dritter Bereich) rühren von der endlichen *slew rate* und der maximalen Bandbreite des Operationsverstärkers (typischerweise 200 kHz) her. Die theoretische Herleitung dieses Verhaltens zeige ich im Abschnitt 3.2.

Das Verhalten des Systems unter Einfluss von periodischen Signalen wird im Abschnitt 3.5 beschrieben. Wird zusätzlich noch Rauschen auf das System gegeben, so wird auf der einen Seite die Synchronisation erschwert, andererseits kann aber stochastische Resonanz auftreten. Diesen Effekt untersuche ich in Kapitel 4.

Legt man Rauschen an das System an, so beobachtet man ohne Kopplung das für ein Schwellensystem erwartete Verhalten: Die Sprünge sind exponentialverteilt, die mittlere Sprungrate nimmt mit der Stärke des Rauschens zu. Eine schwache Kopplung ändert daran nicht viel. Ebenso hat schwaches Rauschen nur wenig Einfluss auf die kopplungsinduzierte Dynamik des Systems. Sind beide Einflüsse etwa gleich stark, können sich die beiden Effekte mischen. Die Verweildauerverteilungen, die im ersten Fall exponentialverteilt und im zweiten Fall annähernd deltaverteilt sind – leichte Abweichungen rühren von überall vorhandenem Rauschen her – werden deutlich komplizierter. Bei schwacher Kopplung und moderater



**Abbildung 3.1.:** a) Autooszillationen der drei Elemente, erkennbar ist die Phasenverschiebung um  $120^\circ$ . b) Skalierungsverhalten der Autooszillationen. Für  $\lambda < \lambda_c$  keine Oszillationen,  $\lambda > \lambda_c$  Skalierung der Frequenz kurz oberhalb des Bifurkationspunkts  $\lambda_c$ , schließlich Begrenzung der Frequenz durch den Operationsverstärker.



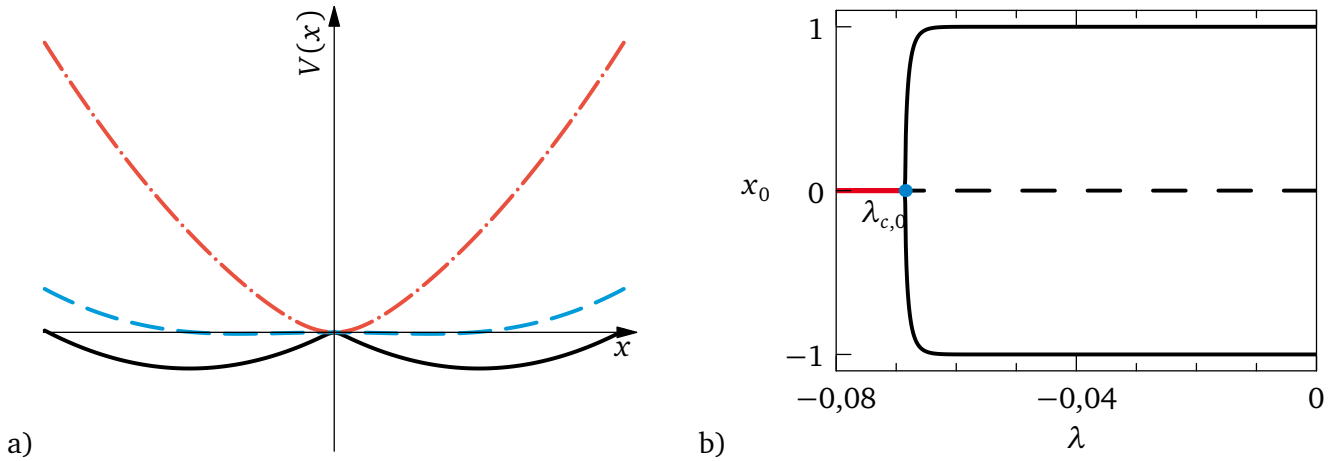
**Abbildung 3.2.:** Phasenraumdarstellung des Systems. Der Wert der  $x_i$ -Komponenten an den Fixpunkten ist gegeneinander aufgetragen. Äquivalente Fixpunkte sind in gleicher Farbe markiert: die frustrierten Fixpunkte mit  $(\uparrow, \downarrow, \uparrow)$  und zyklisch in rot,  $(\downarrow, \downarrow, \uparrow)$  und zyklisch in blau,  $(\uparrow, \uparrow, \uparrow)$  sowie  $(\downarrow, \downarrow, \downarrow)$  in gelb.

Rauschstärke kann so zum Beispiel Kohärenzresonanz auftreten. Dies wird in Kapitel 3.4 ausführlicher beschrieben.

### 3.1 Stabilitätsanalyse des Systems

Ein Fixpunkt eines dynamischen Systems ist ein Punkt  $x_0$  für den  $\dot{x}_0 = f(x_0) = 0$  gilt, der also eine zeitlich konstante Lösung des Systems ist. Für das Systemverhalten ist es interessant, sich die Stabilität dieser Punkte anzusehen und zu prüfen, bei welchen Parameterwerten sie sich ändern kann. Zur Stabilitätsanalyse wird das System (2.2) um die Fixpunkte herum linearisiert, so dass eine mehrdimensionale lineare Gleichung entsteht. Das ist möglich, da nach dem Hartman-Grobman-Theorem bei einem differenzierbaren Vektorfeld in einer kleinen Umgebung um den Fixpunkt die Eigenvektoren der Jacobimatrix  $Df(x)$  tangential zu den Mannigfaltigkeiten liegen und die Realteile der Eigenwerte den Lyapunovexponenten entsprechen. Die Lyapunovexponenten beschreiben die Stabilität entlang dieser Mannigfaltigkeiten. Ändert sich das Vorzeichen des Lyapunovexponenten, so wechselt die Stabilität entlang der entsprechenden Eigenrichtung. Weiterhin kann sich die Position von Fixpunkten abhängig von Systemparametern verschieben, sie können miteinander kollidieren, verschwinden oder neu hinzukommen. Diese Änderungen des Systemverhaltens nennt man Bifurkationen, den zugehörigen Parameterwert Bifurkationspunkt. Sie werden je nach Verhalten in verschiedene Klassen eingeteilt. Um eine Bifurkation zu analysieren, betrachtet man das System am Fixpunkt in der Nähe des Bifurkationspunktes entlang der sogenannten Zentralmannigfaltigkeit. Das ist die Richtung, zu der der Realteil des Eigenwerts am Bifurkationspunkt verschwindet, die also ihre Stabilitätseigenschaft ändert. Die resultierende Differentialgleichung wird in den führenden Ordnungen betrachtet, aus denen dann auf die topologische Äquivalenz zu den Bifurkationstypen geschlossen wird.

Im betrachteten System hat bei niedriger Kopplungsstärke jedes Teilsystem drei Fixpunkte: zwei stabile in der Nähe von  $\pm 1$  und einen instabilen dazwischen. Es existieren also für kleine Kopplungsstärken 27 Fixpunkte, die sich in Gruppen unterteilen lassen. Für die Systemdynamik sind insbesondere die folgenden Fixpunkte interessant: Alle Elemente im selben stabilen Zustand  $(\uparrow, \uparrow, \uparrow)$ ,  $(\downarrow, \downarrow, \downarrow)$ , alle bei der Null  $(0,0,0)$  und die frustrierte Anordnung wie z. B.  $(\uparrow, \downarrow, \uparrow)$  (und zyklisch). Diese Fixpunkte sind in Abbildung 3.2 skizziert.



**Abbildung 3.3.:** a) Verlauf des Potentials für verschiedene Werte des Kontrollparameters, —  $\lambda = 0$ , --  $\lambda = \lambda_{c,0}$ , - -  $\lambda < \lambda_{c,0}$ .  
b) Position der Fixpunkte, abhängig von der Kopplungsstärke  $\lambda$ . Die Werte wurden mit Matlab numerisch genähert. — stabiler Fixpunkt, -- instabiler Fixpunkt. Die Farben entsprechen Teil a).

Es treten bei Variation der Kopplungsstärke verschiedene Bifurkationen auf, die ich im Folgenden kurz vorstellen werde. Die zugehörigen Rechnungen sind in Anhang B.1 wiedergegeben. Zuerst gehe ich auf die Bifurkationen des Zustands  $(0,0,0)$  ein. Die Jacobimatrix hat am Fixpunkt drei Eigenwerte:

$$\Lambda_0 = \beta (A\lambda + A\gamma - 1) \quad (3.1a)$$

$$\Lambda_1 = \beta \left( A\gamma - 1 - \frac{A\lambda}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} A\lambda \right) \quad (3.1b)$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_1^* \quad (3.1c)$$

Die Eigenrichtung  $\vec{u} = (1,1,1)^T$  zum ersten Eigenwert ist eine Symmetrieachse des Systems im Phasenraum, vgl. Abb. 3.6. Der Realteil des ersten Eigenwerts wechselt an der Stelle  $\lambda_{c,0} = 1/A - \gamma$  sein Vorzeichen, die Eigenrichtung  $\vec{u}$  wird bei Verringerung der Kopplungsstärke stabil. Die Normalform des Systems lautet:

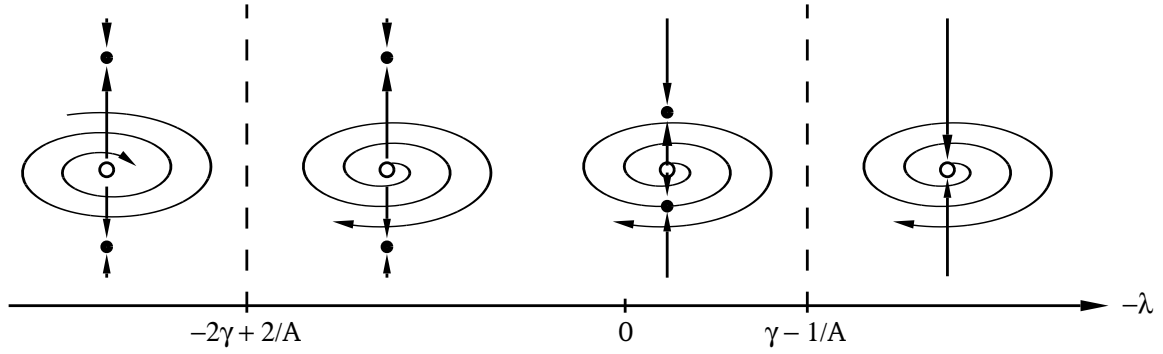
$$\dot{x} = A\beta x (\lambda - \lambda_{c,0}) - 2\beta A x^3 \quad (3.2)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Heugabelbifurkation, sie ist in Abbildung 3.3b für dieses System dargestellt. Zwei stabile Fixpunkte, in diesem Fall  $(\uparrow, \uparrow, \uparrow)$  und  $(\downarrow, \downarrow, \downarrow)$ , laufen auf einen instabilen Fixpunkt (den Ursprung) zu, treffen diesen am Bifurkationspunkt und verschwinden. Der vorher instabile Zustand wird stabil. In Abbildung 3.3a ist das (auf die Eigenrichtung  $\vec{u}$  projizierte) Potential des Systems für verschiedene Kopplungsstärken  $\lambda$  dargestellt. Auch hier sieht man, wie die beiden stabilen Fixpunkte, die bei sehr schwacher Kopplung existieren, unterhalb des Bifurkationspunkts verschwinden und nur der stabile Fixpunkt im Ursprung übrig bleibt.

Die Realteile des zweiten dritten Eigenwerts dagegen wechseln bei  $\lambda_{c,1} = 2\gamma - 2/A$  ihr Vorzeichen. Bei Erhöhung der Kopplungsstärke über diesen Wert hinaus werden die Eigenrichtungen  $\vec{v}_{1,2}$  stabil. Die komplexe Normalform, ausgedrückt mit Hilfe der Eigenwerte  $\Lambda_1, \Lambda_2$ , lautet

$$\dot{z} = -3\Lambda_1 z + \frac{3}{\beta^3} (\Lambda_2 - \beta) (\Lambda_1 - \beta)^2 z^* z z, \quad (3.3)$$

was die Normalform einer Hopf-Bifurkation ist. Das Verhalten wechselt also von einem stabilen Fokus mit instabiler Richtung  $\vec{u}$  bei großer Kopplungsstärke, über einen vollständig instabilen Fokus bei einer



**Abbildung 3.4.:** Bifurkationen von  $(\uparrow, \uparrow, \uparrow)$ ,  $(0,0,0)$  und  $(\downarrow, \downarrow, \downarrow)$ . Für positive Kopplungsstärke ist der Ursprung instabil, die beiden gleichmäßig geordneten Fixpunkte sind stabil. Wird die Kopplung negativ, so verschwinden die geordneten Fixpunkte bei  $-\lambda_c = \gamma - 1/A$  in einer Heugabelbifurkation. Bei der Hopf-Bifurkation  $-\lambda_{c,1} = -2\gamma + 1/A$  wechselt die Stabilität des Ursprungs in der Ebene senkrecht zu  $\vec{u}$ .

Kopplungsstärke zwischen  $2\gamma - 1/A > \lambda > 2/A - \gamma$ , bis hin zu einem instabilen Fokus mit anziehender Richtung  $\vec{u}$ .

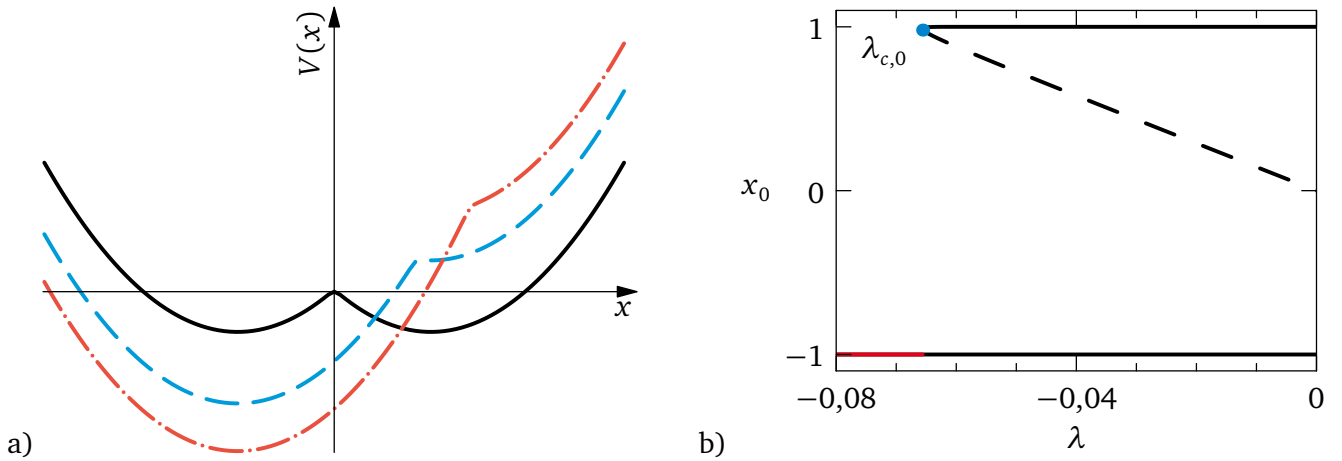
Nun betrachte ich die Fixpunkte  $(\uparrow, \uparrow, \uparrow)$  und  $(\downarrow, \downarrow, \downarrow)$ , bei denen alle Elemente im selben Zustand sind. Wenn die Kopplungsstärke  $\lambda$  größer als Null ist, haben die stabilen Zustände der einzelnen Elemente ziemlich genau den Betrag Eins. Auf Grund der Kopplung sind diese beiden Fixpunkte stabil, wie man auch anhand der Argumentation in Kapitel 2 sehen kann. Ist die Kopplungsstärke negativ, können sie, wie oben bei der Betrachtung des Zustands  $(0,0,0)$  angedeutet, verschwinden. Die berechneten Bifurkationspunkte stimmen mit denen von  $(0,0,0)$  überein.

Einen Teil des Systemverhaltens kann man an diesen drei Fixpunkten ablesen: Die Fixpunkte  $(\uparrow, \uparrow, \uparrow)$  und  $(\downarrow, \downarrow, \downarrow)$  sind für  $\lambda > 0$  stabil. Sie verschwinden bei invertierender Kopplung (also  $\lambda < 0$ ), wenn die Kopplungsstärke unterhalb des Bifurkationspunktes  $\lambda_{c,1} = 1/A - \gamma$  liegt, bei dem eine Heugabelbifurkation auftritt. Die Dynamik des Systems wird dann unter anderem vom Fixpunkt  $(0,0,0)$  bestimmt, der aus Richtung der (nicht mehr existierenden) ersten beiden Fixpunkte anziehend wird. Dafür ist er jedoch in der Ebene senkrecht dazu instabil, die entsprechenden Eigenwerte sind komplex. Man beobachtet, dass sich das System spiralförmig vom Ursprung entfernt. Die Fixpunkte und ihre Stabilitätseigenschaften sind in Abbildung 3.4 dargestellt.

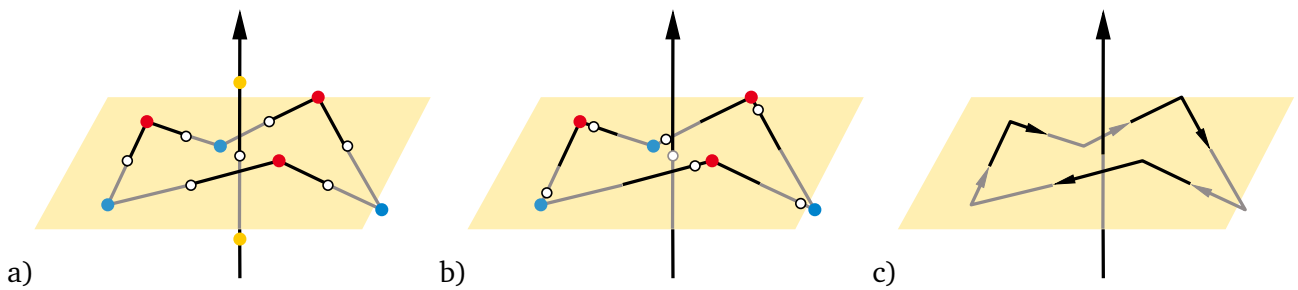
Jetzt betrachte ich die Stabilität der Fixpunkte mit einem frustrierten Element, wie z. B.  $(\uparrow, \downarrow, \uparrow)$ . Für negative Kopplungsstärken wird das frustrierte Element bei  $\lambda_c = -\gamma x_c + 1/A \cdot \text{Artanh } x_c$  instabil, vgl. auch die Argumentation in Kap. 2. Die Normalform des Systems lautet (mit dem Abstand vom Fixpunkt  $\delta x = x - x_c$ ):

$$\dot{\delta x} = -2\beta A \gamma x_c (\delta x)^2 - \frac{\beta x_c}{\gamma} (\lambda - \lambda_c) \quad (3.4)$$

Es liegt eine Sattel-Knoten-Bifurkation vor. Das Potential der ersten Komponente sowie die Position der stabilen und instabilen Fixpunkte sind in Abbildung 3.5a bzw. b dargestellt. Der instabile Fixpunkt, der zwischen den beiden stabilen Fixpunkten liegt (in Teil b mit der unterbrochenen Linie gekennzeichnet), wandert auf einen der beiden stabilen Fixpunkte zu und trifft diesen am Bifurkationspunkt, wo sie beide verschwinden. Das betrachtete Element besitzt jetzt nur noch einen stabilen Fixpunkt, in den es umschalten wird. Diese Sattel-Knoten-Bifurkation findet gleichzeitig für alle frustrierte Zustände statt. Diese Fixpunkte sind vor der Bifurkation durch ihre Zentralmannigfaltigkeiten verbunden, d.h. sie liegen auf einem Ring. Findet die Sattel-Knoten-Bifurkation statt, so entsteht eine anziehende Grenzzyklus-Separatrix [Anishchenko u. a., 2002]. Dieser Vorgang ist in Abbildung 3.6 dargestellt: Bei Teil a der Abbildung sind die Fixpunkte mit frustriertem Element noch stabil, bei Teil b wandern die (mit leeren



**Abbildung 3.5.:** a) Verlauf des Potentials eines einzelnen Elementes für unterschiedliche Kopplungsstärken. —  $\lambda = 0$ , —  $\lambda = \lambda_{c,0}$ , —  $\lambda < \lambda_{c,0}$ . Lage der Fixpunkte (stabil —, instabil —). Farben wie in a).



**Abbildung 3.6.:** Phasenraumdarstellung des Systems wie in Abbildung 3.2, allerdings rotiert. Die Ebene trennt die Zustände, bei denen  $\uparrow$  bzw.  $\downarrow$  häufiger besetzt sind. Mit dem Pfeil ist die  $\vec{u}$ -Richtung markiert. Von links nach rechts wird die Stärke der invertierten Kopplung erhöht. Die instabilen Fixpunkte (leere Kreise) wandern auf die stabilen Fixpunkte zu und treffen diese. Es bleibt nur die zyklische Separatrix übrig.

Kreisen dargestellten) instabilen Fixpunkte auf die stabilen Fixpunkte zu, treffen diese schließlich und es bleibt nur noch die in Teil c skizzierte Separatrix übrig, auf der sich die deterministische Dynamik des Systems abspielt.

Bei positiver Kopplungsstärke findet ebenfalls eine Sattel-Knoten-Bifurkation statt, allerdings schaltet hier das Element, das den beiden anderen Elementen entgegengerichtet ist um. Beim oben erwähnten Fixpunkt schaltet das System also nach  $(\uparrow, \uparrow, \uparrow)$ . Sind zwei Elemente negativ und eines positiv schaltet das System in den Fixpunkt  $(\downarrow, \downarrow, \downarrow)$  um.

### 3.2 Deterministische Dynamik

Um den Übergang eines einzelnen Elementes zu untersuchen (vgl. [Bulsara u. a., 2004]), betrachte ich erneut die Differentialgleichung (2.2) für einen Kontrollparameter nahe dem im vorhergehenden Abschnitt berechneten Bifurkationspunkt  $\lambda_c$ . Die Zeit für einen Übergang des  $(i)$ -ten Elements von  $x_0$  nach  $-x_0$  lässt sich mittels Trennung der Variablen und der Annahme, dass nur im betrachteten Element ein Übergang stattfindet, aus der Gleichung

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{-x_0} \frac{dx_i}{f_i(x_i)} \quad (3.5)$$

berechnen. Das Vorgängerelement befindet sich im gesamten betrachteten Zeitraum im Zustand  $x_0$ . Bei Betrachtung des Integranden stellt man fest, dass das lokale Minimum der Funktion  $f_i(x)$  die größte Auswirkung auf die Integration hat. Daher wird die Funktion um die Stelle  $x_* : (f_i(x_*))' = 0$  entwickelt. Die ersten drei Terme lauten:

$$f_i(x_*) = -\beta [x_* - \tanh(A\gamma x_* + A\lambda x_0)] \quad (3.6a)$$

$$f_i'(x_*) = -\beta \left(1 - [1 - \tanh^2(A\gamma x_* + A\lambda x_0)] A\gamma\right) = 0 \quad (3.6b)$$

$$f_i''(x_*) = -\beta A\gamma [1 - \tanh^2(A\gamma x_* + A\lambda x_0)] A\gamma \cdot 2 \tanh(A\gamma x_* + A\lambda x_0) \quad (3.6c)$$

Auf Grund der Bedingung  $f_i'(x_*) = 0$  lassen sich die Ausdrücke noch vereinfachen. Mit dem Fixpunkt der Sattel-Knoten-Bifurkation  $x_c = \sqrt{1 - \frac{1}{A\gamma}}$  aus dem vorhergehenden Abschnitt gilt näherungsweise:

$$f_i(x_i) \approx -\beta(x_* - x_c) - \beta A\gamma x_c (x_i - x_*)^2 \quad (3.7)$$

$$t - t_0 = -\frac{1}{\beta A\gamma x_c} \int_{x_0}^{-x_0} \frac{dx_i}{\frac{x_* - x_c}{A\gamma x_c} + x_i^2} \quad (3.8)$$

Die Integrationsgrenzen werden jetzt nach  $\pm\infty$  verschoben. Für das Integral ergibt sich:

$$t - t_0 = \frac{\pi}{\beta \sqrt{A\gamma x_c}} \frac{1}{\sqrt{x_* - x_c}} \quad (3.9)$$

Aus den Gleichungen (3.6) folgt:

$$(x_* - x_c) = \frac{x_0}{\gamma} \left( \lambda - \frac{\text{Artanh } x_c}{Ax_0} + \frac{\gamma x_c}{x_0} \right) = \frac{1}{\gamma} \lambda_c - \lambda \quad (3.10)$$

und mit  $t_0 = 0$  folgt:

$$t = \frac{\pi}{\beta \sqrt{Ax_c}} \cdot (\lambda_c - \lambda)^{-1/2} \quad (3.11)$$

Das im Experiment und in den Simulationen beobachtete Verhalten, vgl. auch Abb. 3.1, kann also durch diese Rechnung erklärt werden.

### 3.3 Stochastische Dynamik

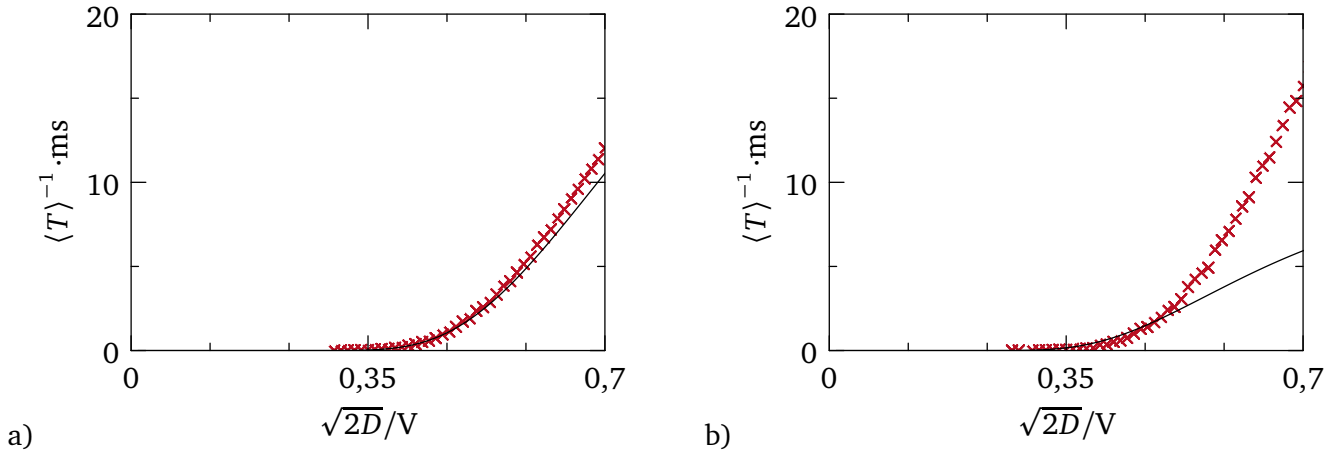
Die Dynamik in stochastischen Systemen kann man auf dieselbe Weise wie in deterministischen Systemen analysieren. Im Folgenden werde ich mich nur auf die für die Systemdynamik wichtige Sattel-Knoten-Bifurkation des frustrierten Elements beschränken. Um die Ergebnisse von Arnold [2003] verwenden zu können, untersuche ich den Einfluss der stochastischen Komponente auf den deterministischen Teil am Bifurkationspunkt und versuche so, die stochastische Normalform des Systems zu finden.

Zuerst betrachte ich die Systemdynamik in der  $x$ -Komponente der stochastischen Differentialgleichung

$$dx = -\beta [x - \tanh(A\gamma x - A\lambda + A\gamma)] dt \quad (3.12a)$$

$$dy = -\kappa y dt + \sqrt{2D} dW_t. \quad (3.12b)$$





**Abbildung 3.7.:** Experimentell (x) ermittelter Kehrwert der mittleren Verweildauer eines Elements  $\langle T \rangle$  und berechnete (–) Übergangsrate eines einzelnen Elements bei unterschiedlichen Kopplungsstärken: a)  $\lambda = 0$ , b)  $\lambda = -0,013$ . Die Näherung unterschätzt die Übergangsrate für größere Rauschstärken deutlich.

Nach einigen Umformungen finde ich am Bifurkationspunkt der Sattel-Knoten-Bifurkation

$$f(x_0, \lambda_c) = \frac{\beta}{A\gamma} \frac{\tanh Ay}{1 + x_0 \tanh Ay}. \quad (3.13)$$

Dieser Term wird zur Normalform (3.4) des deterministischen Systems addiert. Betrachte ich die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung für diesen Ausdruck, so finde ich, dass sie näherungsweise (für die relevanten Systemparameter und nicht zu kleines Rauschen) eine Gleichverteilung auf dem Intervall  $[-80; 0,5]$  ist. Ein Vergleich mit den Betrachtungen von Arnold [2003], Kap. 9.3 zeigt, dass die Sattel-Knoten-Bifurkation durch diesen Prozess verschwindet, da der Rauschprozess eine starke additive Komponente liefert und den Bifurkationsparameter  $\lambda$  häufig genug so stark vergrößert, dass sich das System vom untersuchten Fixpunkt beliebig schnell entfernen kann.

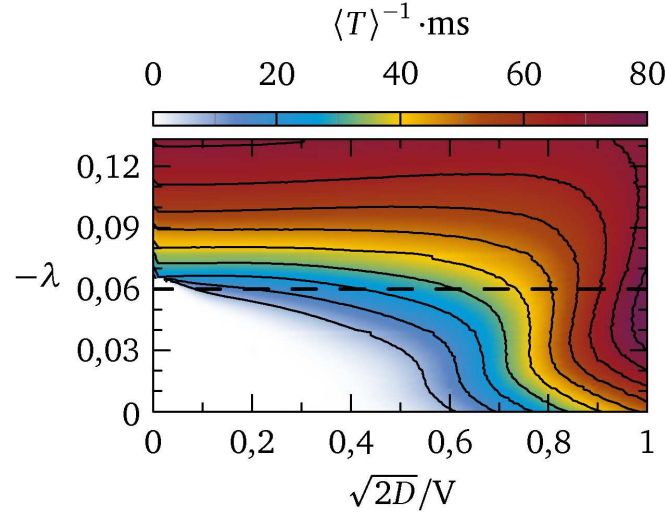
Die Analyse der Übergänge muss also auf andere Weise geschehen. Die stochastische Dynamik im ungekoppelten Fall entspricht der von McNamara und Wiesenfeld [1989] beschriebenen. Das System aus Schmitt-Trigger und Rauschen wird durch die Differentialgleichungen (3.12) beschrieben. Hieraus lässt sich über die zugehörige Fokker-Planck-Gleichung die Dynamik betrachten.

$$\partial_t p = \partial_{x_i} \left[ \beta \left( x_i - \tanh(A(\gamma x_i + y - \lambda x_{i-1})) \right) p \right] + \partial_y (\kappa y p) + D \partial_y^2 y p \quad (3.14)$$

Das dieser Fokker-Planck-Gleichung zu Grunde liegende Potential besitzt nur in  $y$ -Richtung sowohl Drift als auch Diffusion. Der Diffusionsprozess über eine Barriere, wie er sonst in der stochastischen Resonanz angenommen wird, wird hier also durch eine Diffusion „quer“ zur Barriere über einen Sattelpunkt ersetzt. Der gesamte Prozess ist ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit einer Quelle bei  $y_-$  und einer absorbierenden Barriere bei  $y_+$ . Beide Sattelpunkte des Potentials hängen sowohl von der Schwelle  $\gamma$  des Systems, als auch von den Eingangsspannungen  $s(t)$  und  $\lambda x_{i-1}$  des Schmitt-Triggers ab. Eine sinnvolle Annahme ist jetzt, die  $x_i$ -Koordinate zu diskretisieren. Die Wahrscheinlichkeitsdichte wird also zu einer Aufenthaltswahrscheinlichkeit an den diskreten Punkten  $x_i = \pm 1$ :  $p(x_i, y, t) \rightarrow p_{\pm}(y, t)$ . Dadurch vereinfacht sich die Fokker-Planck-Gleichung zu

$$\partial_t p_+ = \partial_y (\kappa y p_+) + D \partial_y^2 p_+ + \partial_t p_-(y_-) \delta(y - y_-) \quad y < y_- \quad (3.15)$$

$$p_+ = 0 \quad \text{sonst.} \quad (3.16)$$



**Abbildung 3.8.:** Mittlere Übergangsraten unter Variation der Kopplungsstärke  $\lambda$  und der Stärke des Rauschens  $\sqrt{2D}$ .

Zwei weitere Annahmen müssen dann sein, dass das System die Information über die Vergangenheit schnell genug verliert ( $\kappa$  hinreichend groß) und dass die Eingangssignale langsam gegen den eigentlichen Übergangsprozess sind. Dann erfolgt eine langsame Diffusion des Zustands in die absorbierende Barriere bei  $y_+$  mit der Rate  $w_+$ . Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit an einem Punkt  $x = \pm 1$  ist dann

$$p_+(y, t) = p_0(y) \exp(-w_+ t) \quad (3.17)$$

$$p_0(y) = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi D}} \exp\left(-\frac{\kappa y_+^2}{2D}\right). \quad (3.18)$$

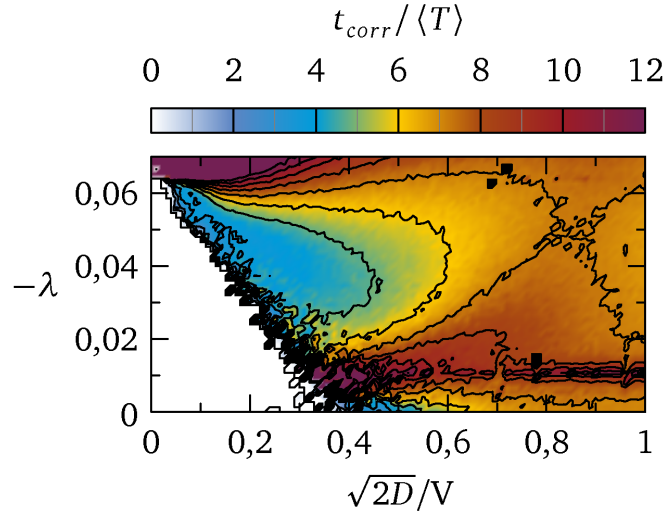
Unter der Annahme, dass der Einfluss der genauen Lage der Quelle bei  $y_-$  vernachlässigbar ist und dass  $y_+$  groß ist, kann die Übergangsrate berechnet werden:

$$w_+ \approx \frac{4}{3} \kappa y_+ \left(\frac{\kappa}{2\pi D}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\kappa y_+^2}{2D}\right) \quad (3.19)$$

Im Term  $y_+$  sind, wie oben schon erwähnt, die Eingangsspannungen eines einzelnen Schmitt-Triggers (ohne den Rauschprozess) enthalten:  $y_+ = \gamma - \lambda x_{i-1} - s(t)$ . Abhängig von der Spannung des vorhergehenden Elements finde ich also eine Übergangsrate bei  $s(t) = 0$  von

$$w_+(x_{i-1} = \pm 1) = \frac{4}{3} \kappa (\gamma \mp k) \left(\frac{\kappa}{2\pi D}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\kappa (\gamma \mp k)^2}{2D}\right). \quad (3.20)$$

Die Wechsel des frustrierten Elements sind wie erwartet deutlich schneller als die der anderen. Außerdem sieht man, dass diese Gleichung nur für recht schwaches Rauschen gültig sein kann. Eine Verringerung der Übergangsrate bei starkem Rauschen (hervorgerufen durch den  $1/\sqrt{D}$  Vorfaktor) ist nämlich nicht realistisch. Diese Einschränkung kennt man allerdings auch von anderen Übergangsraten, wie z. B. der Kramersrate [H. A. Kramers, 1940], die bei hohen Rauschstärken gegen einen konstanten Wert sättigt. Die Abweichungen rühren von der Annahme her, dass die Relaxation in der  $x$ -Komponente schnell gegen die Zustandswechsel ist. Das ist bei starkem Rauschen nicht mehr der Fall, die Diskretisierung der  $x$ -Komponente ist dann keine gute Näherung mehr. Die Rauschstärke, bis zu der die berechneten Übergangsraten anwendbar sind, hängt von der Kopplungsstärke  $\lambda$  und der Schwellspannung  $\gamma$  ab. Eine



**Abbildung 3.9.:** Kohärenzzeit des Systems  $t_{corr}/\langle T \rangle$  aufgetragen gegen Kopplungsstärke  $\lambda$  und Rauschen  $\sqrt{2D}$ . Erkennbar ist ein Bereich, der sich von  $\lambda \approx -0,01$  und  $\sqrt{2D} \approx 0,4V$  hin zu größeren Kopplungs- und Rauschstärken erstreckt, in dem die Kohärenz des Systems besonders ausgeprägt ist.

mögliche Abschätzung für den Gültigkeitsbereich ist es, den Wendepunkt der berechneten Übergangsraten als Grenze zu nehmen, er liegt bei einer Rauschstärke von  $D_w = 2(1 - (2/3)^{1/2})\kappa(\gamma \mp \lambda)$ . Nähert sich die Kopplungsstärke der Schwellspannung und damit dem Bifurkationspunkt  $\lambda_c$  ist die Näherung nur noch für sehr schwaches Rauschen gültig. Das kann man sehr deutlich in Abbildung 3.7 erkennen. Die Parameter der Funktion stammen aus dem Experiment, es wurde nur eine Anpassung vorgenommen, die berücksichtigt, dass bei starker Kopplung nach dem Umschalten des ersten Elements die beiden anderen Elemente umschalten müssen, damit ein Übergang wieder wahrscheinlich ist.

In Abbildung 3.8 sind die mittleren Übergangsraten  $w = \langle T \rangle^{-1}$  gegen die Kopplungsstärke  $\lambda$  und die Stärke des Rauschens  $\sqrt{2D}$  aufgetragen. Während am linken Bildrand die rein deterministische Dynamik aus Abschnitt 3.1 herrscht, liegt am unteren Bildrand ein rein stochastischer Prozess vor. In der Mitte, dort wo sich beide Effekte mischen, sollte ein Wechselspiel zwischen ihnen zu beobachten sein.

Mit den dabei auftretenden Effekten beschäftige ich mich im folgenden Abschnitt. Im weiteren Verlauf betrachte ich das System nur noch unterhalb des Bifurkationspunktes, also im Bereich der Kopplungsstärke zwischen  $\lambda = 0$  und  $\lambda = -0,06$ . Der entsprechende Bereich ist in Abbildung 3.8 durch die unterbrochene Linie angedeutet.

### 3.4 Kohärenzresonanz

Wie bereits im vorigen Abschnitt angesprochen, kann ein Wechselspiel zwischen der deterministischen Dynamik durch eine endliche Kopplungsstärke und der stochastischen Dynamik durch externes Rauschen stattfinden. Wenn die stochastische Aktivierungszeit für das Umschalten des „frustrierten“ Elements zu der Zeitskala des Schaltprozesses passt, so kann die Kohärenzlänge des Ausgangssignals eines Elements sogar für Kopplungsstärken unterhalb der Sattel-Knoten-Bifurkation, also im System ohne Autooszillationen, zunehmen. Durch dieses Verhalten können auch in dieser Art von Systemen regelmäßige raum-zeitliche Muster entstehen.

Die Kohärenz des Signals messe ich, indem ich dessen Autokorrelationsfunktion betrachte und durch Integration darüber eine Abschätzung für die Autokorrelationszeit des Systems erhalte. Diese Autokorrelationszeit wird auf die mittlere Aktivierungszeit  $\langle T \rangle$  normiert, das Ergebnis ist eine Näherung für die Zahl zueinander kohärenter Schwingungen, vgl. [Pikovsky und Kurths, 1997].

---

Die Kohärenz eines einzelnen Elementes in Abhängigkeit von Kopplungsstärke und Rauschstärke ist in Abbildung 3.9 dargestellt. Man erkennt einen Bereich, der von  $\lambda \approx -0,01$  und  $\sqrt{2D} \approx 0,4V$  hin zu höheren Rauschstärken und Kopplungsstärken läuft, in dem die Kohärenz des Systems besonders gut ist. Das hier untersuchte System zeigt also bei bestimmten Rausch- und Kopplungsstärken Kohärenzresonanz.

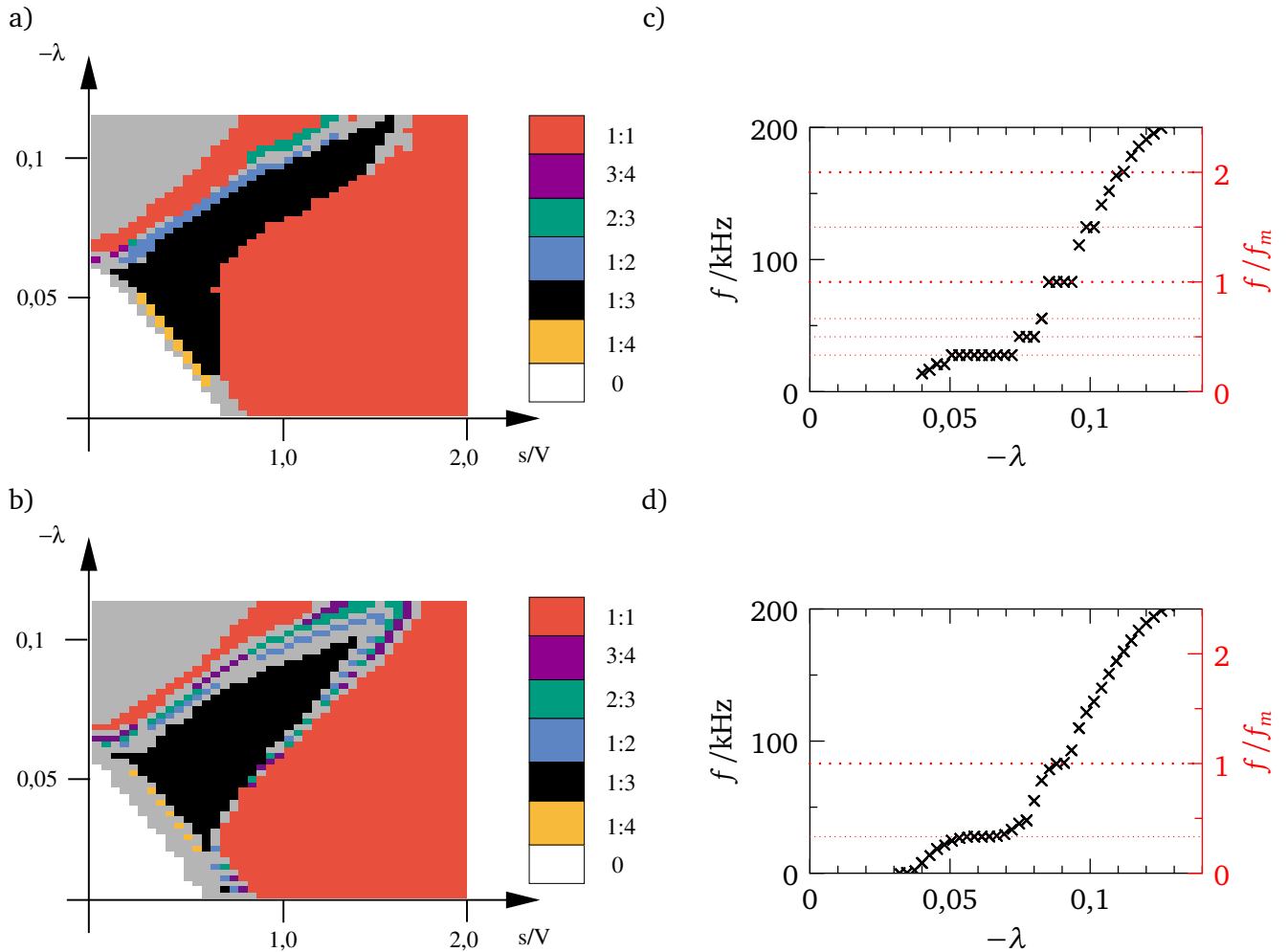
Genau wie im von Pikovsky und Kurths [1997] betrachteten System existieren auch hier unter Rausch einfluss zwei Zeitskalen: Die (stochastische) Aktivierungszeit und die (deterministische) Schaltzeit. Die Gesamtzeit eines Schaltvorgangs ist die Summe dieser beiden Zeiten. Wichtig ist, dass die beiden Zeiten unterschiedliche Abhängigkeiten von der Rauschstärke haben, und dass die Aktivierungsschwelle relativ klein und die Schaltzeit relativ groß ist. Dadurch wird die Aktivierungszeit klein gegen die Schaltzeit, während das Rauschen noch so schwach ist, dass die Fluktuationen der Schaltzeit klein bleiben.

---

### 3.5 Dynamik unter Modulation durch externe Signale

---

In diesem Kapitel betrachte ich das Verhalten des Systems unter externem periodischen Antrieb. Mit einem Funktionsgenerator HP8116A werden periodische, sinusförmige Signale erzeugt und in das System eingekoppelt. Je nach Signalfrequenz, Signalamplitude und Kopplungsstärke beobachte ich hierbei ein unterschiedliches Antwortverhalten der einzelnen Elemente des Systems. Einen Teil der Daten zeigt Abbildung 3.10. In der linken Hälfte (Unterabbildungen a und b) ist das Verhältnis von Systemfrequenz  $f$  zu Antriebsfrequenz  $f_m$  farbcodiert gegen die Kopplungsstärke  $\lambda$  und die Signalamplitude  $s$  aufgetragen. Teil a zeigt das Verhalten ohne externes Rauschen, bei b wurde ein Rauschen von  $\sqrt{2D} = 0,17V$  auf das System gegeben. Bei kleinem Antriebssignal und ohne Kopplung schwingt das System nicht (weißer Bereich). Erhöht man die Signalamplitude (unterer Rand der Abbildung) über die Schwellenspannung hinaus, so folgt das System dem Antrieb (roter Bereich). Bei kleiner Signalamplitude und langsamer Erhöhung der Kopplungsstärke rastet das System auf rationale Frequenzvielfache des Antriebssignales ein. Besonders ausgeprägt ist dieser Effekt für das Verhältnis  $1/3$  (schwarzer Bereich). Das rührt von der bevorzugten Dynamik des Systems unter endlicher Kopplung her: Da die Elemente einen geschlossenen Ring bilden, können sich nur drei mögliche Phasenverschiebungen zwischen den Elementen einstellen:  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  und  $240^\circ$ , von denen nur  $120^\circ$  eine stabile Lösung besitzt. Das Summensignal des Systems oszilliert daher mit der dreifachen Frequenz der Einzelelemente. Die in Abbildung 3.10(a,b) gezeigten Flächen gleicher Frequenzvielfachen nennt man Arnoldsungen [Anishchenko u. a., 2002]. Bei einem Schnitt durch diese bei fester Signalamplitude  $s = 0,3V$  erkennt man deutlich das Einrasten auf verschiedene rationale Frequenzvielfache, abhängig von der Kopplungsstärke  $\lambda$ , vgl. Abbildungen 3.10(c,d). Die hier sichtbaren Plateaus werden Teufelstrepfen genannt. Dieses Synchronisieren auf unterschiedliche Frequenzvielfache tritt auf, wenn man die Eigenfrequenzen von zwei Systemen, die man miteinander gekoppelt hat, gegeneinander verstimmt. Genau dasselbe geschieht hier bei Variation der Kopplungsstärke: Die Eigenfrequenz des Ringes wird gegenüber der in diesem Experiment konstant gehaltenen Frequenz des externen Signals verstimmt (vgl. Abschnitt 3). Bereits ein relativ schwaches Rauschen (vgl. Abb. 3.10(b,d)) schwächt die Synchronisation zwischen Eingangssignal und System.



**Abbildung 3.10.:** Synchronisationseffekte im System unter periodischem Antrieb ohne (a,c:  $\sqrt{2D} = 0V$ ) und mit Rauschen (b,d:  $\sqrt{2D} = 0,17V$ ). Dargestellt ist das Verhältnis der Frequenz der Antwort des Systems zur Antriebsfrequenz, abhängig von Kopplungsstärke  $\lambda$  und Signalamplitude  $s$ . Ohne Kopplung folgt das Element dem Antriebssignal, wenn die Amplitude größer als die Schwellenspannung ist. Deutlich erkennbar ist auch der relativ starke Synchronisationsbereich für das Frequenzverhältnis  $1/3$ . Die Abbildungen c) und d) sind Schnitte durch a) bzw. b) bei  $s = 0,3V$ . Man erkennt deutlich das Einrasten der Systemantwort auf rationale Vielfache der Antriebsfrequenz, sogenannte Teufelstrepfen. Diese Synchronisationseffekte werden durch das Rauschen unterdrückt.



## 4 Stochastische Resonanz

Koppelt man gleichzeitig ein periodisches Signal und Rauschen in das System ein, so werden die in Kapitel 3.5 gezeigten Synchronisationsbereiche verwischt. Das Rauschen unterdrückt also, wie zu erwarten ist, die Synchronisation in weiten Teilen. Betrachtet man allerdings nur ein schwaches Signal kann man stochastische Resonanz beobachten: Bei schwacher Kopplung gibt es nichtverschwindende Rauschstärken, bei denen das schwache periodische Eingangssignal besonders gut in der Dynamik eines einzelnen Elementes erkennbar ist. Dieses Verhalten widerspricht den Beobachtungen aus [Palacios u. a., 2006]. Im folgenden Abschnitt werde ich eine theoretische Betrachtung dieses Effektes vorstellen, die das beobachtete Verhalten qualitativ wiedergibt. Im letzten Abschnitt stelle ich dann die experimentellen Ergebnisse vor.

### 4.1 Mastergleichung

Eine mögliche Reduzierung des Problems erhält man, wenn man nur noch die Sprungdynamik betrachtet, vgl. [McNamara und Wiesenfeld, 1989; Lindner u. a., 2006]. Diese Reduzierung auf ein rein multistabiles, diskretes System nennt man Master-Gleichung [Gardiner, 1990]. Analog zum Ansatz bei stochastischer Resonanz (vgl. Kap. 1.1) betrachtet man die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten  $n_+^{(i)}(t), n_-^{(i)}(t)$  in den Zuständen  $+$  und  $-$  der einzelnen Elemente ( $i$ ):

$$\dot{n}_+^{(i)}(t) = w_-^{(i)} n_-^{(i)} - w_+^{(i)} n_+^{(i)} = w_-^{(i)} - (w_+^{(i)} + w_-^{(i)}) n_+^{(i)} \quad (4.1)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind hier etwas komplizierter, sie hängen auf der einen Seite vom lokalen Rauschen, auf der anderen Seite aber auch von der Kopplungsstärke und dem Zustand des vorherigen Elements  $n_{\pm}^{(i-1)}$  ab. Zusätzlich kann auch noch ein externes Signal  $s(t)$  wirken. Ein möglicher Ansatz lautet:

$$w_{\pm}^{(i)} = r + k n_{\pm}^{(i-1)} - k n_{\mp}^{(i-1)} \mp r' s(t), \quad (4.2)$$

wobei  $r$  und  $k$  die durch Rauschen bzw. Kopplung verursachten Übergangswahrscheinlichkeiten sind und  $r'$  der Einfluss des Signals. Wie in [McNamara und Wiesenfeld, 1989] berücksichtige ich nur den linearen Einfluss des Signals auf die rauschinduzierten Übergangswahrscheinlichkeiten. Der Ausdruck stellt also eine Taylorentwicklung nach kleinen, langsamen Signalen und kleinen Kopplungsstärken dar. Mit  $n_+^{(i)}(t) + n_-^{(i)}(t) = 1$  folgt sofort:

$$w_{\pm}^{(i)} = r \mp k \mp r' s(t) \pm 2k n_{\pm}^{(i-1)} \quad (4.3)$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (4.1) folgt für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten:

$$\dot{n}_+^{(i)} = r + k + r' s(t) - 2r n_+^{(i)} - 2k n_+^{(i-1)} \quad (4.4)$$

Dies lässt sich für das Gesamtsystem  $N_+ = (n_+^{(1)}, n_+^{(2)}, n_+^{(3)})^T$  als

$$\dot{N}_+ = (r + k + r' s(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} N_+ - 2r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} N_+ \quad (4.5)$$

schreiben und mit der Matrix

$$W = \begin{pmatrix} -2r & 0 & -2k \\ -2k & -2r & 0 \\ 0 & -2k & -2r \end{pmatrix}$$

in etwas übersichtlicherer Form als:

$$\dot{N}_+ = W N_+ + (r + k + r's(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Die Lösung des homogenen Teils der Differentialgleichung setzt sich aus den Eigenvektoren  $\vec{v}_i$  und Eigenwerten  $\Lambda_i$  der Matrix  $W$  zusammen.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\ 1 \\ e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ 1 \\ e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\Lambda_1 = -2r - 2ke^{-i\frac{2\pi}{3}}, \quad \Lambda_2 = -2r - 2ke^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad \Lambda_3 = -2r - 2k$$

Die Differentialgleichung hat also oszillatorische Lösungen. Die Dynamik der einzelnen Elemente ist, wie im Experiment beobachtet, um  $\frac{2\pi}{3}$  phasenverschoben. Jetzt müssen nur noch die inhomogenen Lösungen berechnet werden, die sich als Summe der homogenen Lösungen (mit evtl. zeitabhängigen Vorfaktoren) schreiben lassen:

$$N_+ = \sum c_i(t) \vec{v}_i e^{\Lambda_i t}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung (4.6) findet man, unter Berücksichtigung der homogenen Lösung:

$$\sum_i \dot{c}_i(t) \vec{v}_i e^{\Lambda_i t} = (k + r + r's(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

was sich durch Transformation in das Eigenvektorsystem  $\hat{e}_i$  der Matrix  $W$  zu

$$\sum_i \dot{c}_i(t) \hat{e}_i e^{\Lambda_i t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k + r + r's(t) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

vereinfachen lässt. Die Vorfaktoren  $c_{1,2}$  sind also zeitunabhängig, nur die Lösung in Richtung  $\vec{v}_3$  wird vom inhomogenen Teil der Differentialgleichung beeinflusst. Für die Lösung  $N_+(t)$  findet man bei einem Signal der Form  $s(t) = s \cdot e^{i\omega_m t}$  nach einigem Umformen und unter der Annahme, dass das System eingeschwungen ist ( $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty}$ )

$$N_+(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\Lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\Lambda_2 t} + \vec{v}_3 \left( \frac{1}{2} + \frac{r's}{i\omega_m - 2r - 2k} e^{i\omega_m t} \right). \quad (4.10)$$

Da der Einfluss der Kopplung auf das System klein sein soll, klingen die Beiträge der ersten beiden Terme exponentiell schnell ab.

Interessant ist hier die Untersuchung von stochastischer Resonanz über die Kreuzkorrelationsfunktion von Eingangssignal  $s(t)$  und Systemantwort. Als charakteristisches Maß habe ich in der vorliegenden



Arbeit durchgehend die Amplitude der Korrelationsfunktion gewählt<sup>1</sup>, sie wird im Folgenden als „Kreuzkorrelation“ abgekürzt. Sie lautet hier:

$$C_{xs} = \max_{\tau} \langle N(t)s(t + \tau) \rangle = \left| \frac{r's^2}{i\omega_m - (2r + 2k)} \right| = \frac{|r'|s^2}{\sqrt{\omega_m^2 + (2r + 2k)^2}} \quad (4.11)$$

Das entspricht von der Form her dem von McNamara und Wiesenfeld [1989] hergeleiteten Ausdruck für stochastische Resonanz in bistabilen Systemen. Allerdings wird die Übergangsrate  $r$  durch die kopplungsinduzierte Dynamik (symbolisiert durch  $k$ ) verändert. Die in Gleichung (4.11) verwendeten Größen  $r, k$  und  $r'$  lassen sich im Prinzip aus den Gleichungen (2.2, 2.3) über eine sechsdimensionale Fokker-Planck-Gleichung berechnen, was ich hier jedoch unterlassen habe. Stattdessen verwende ich die experimentell ermittelten Raten aus Abbildung 3.8 als Näherung für den Term  $r + k$ . Den Einfluss des kleinen periodischen Signals  $r'$  nähere ich, indem ich ein zeitlich konstantes Signal auf das System gebe und die Raten messe. Die Differenz zwischen den Raten mit und ohne ein konstantes Signal ist eine gute Abschätzung für den Entwicklungsterm  $r'$ . Setze ich diese experimentellen Terme in Gleichung (4.11) ein, so erhalte ich das in Abbildung 4.1 dargestellte Ergebnis. Hier ist die Kreuzkorrelation farblich kodiert gegen die Kopplungsstärke  $\lambda$  und die Rauschstärke  $\sqrt{2D}$  aufgetragen. Der untere Bildrand zeigt die stochastische Resonanz eines einzelnen Elements (keine Kopplung). Bei ca.  $\lambda = -0,02$ ,  $\sqrt{2D} = 0,6V$  befindet sich ein Gebiet, bei dem die Kreuzkorrelation im Vergleich zum unteren Bildrand leicht erhöht ist. In Abbildung 4.2 sind zwei Schnitte durch Abbildung 4.1 dargestellt: die Kreuzkorrelation für ein einzelnes Element ( $\lambda = 0$ , rote Kreuze) sowie für das System mit Kopplungsstärke  $\lambda = -0,02$  (schwarze Kreise). Die Kurve für endliche Kopplungsstärke liegt über der für ein einzelnes Element. Die oben von mir durchgeführte theoretische Betrachtung unter Zuhilfenahme von experimentellen Daten deutet also darauf hin, dass in dem System verbesserte stochastische Resonanz durch endliche Kopplungsstärke auftritt.

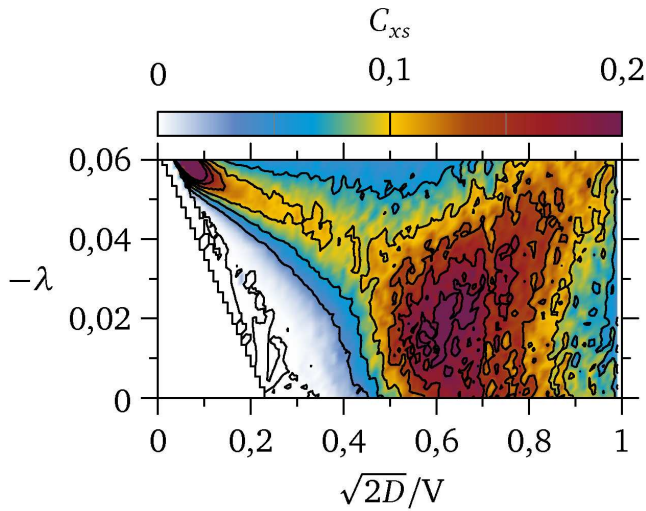
## 4.2 Experimentelle Ergebnisse

Auf das System wird ein schwaches Signal ( $s = 50\text{ mV}$ ) mit verschiedenen festen Frequenzen gegeben. Die Kopplungsstärke  $\lambda$  wird mit einer Schrittweite von  $\Delta\lambda \approx 2,67 \cdot 10^{-3}$  variiert, die Stärke des Rauschens in Schritten von  $20\text{ mV}$ . Die Zeitreihen der einzelnen Elemente sind mit einer Samplingrate von  $5\text{ MHz}$  gleichzeitig mit der des antreibenden Signals aufgenommen worden. Das Signal ist mit einem Funktionsgenerator Typ HP8116A erzeugt worden, das Rauschen mit einem Funktionsgenerator Agilent AG 33250. Das mit diesem Gerät erzeugte Rauschen hat eine Bandbreite von ca.  $10\text{ MHz}$ . Die Kreuzkorrelationsfunktion der aufgenommenen Zeitreihen berechne ich mit einem in C++ geschriebenen Programm.

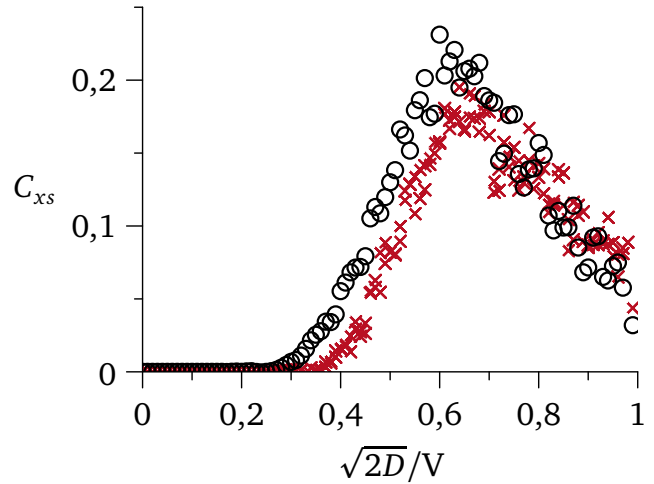
Die Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion, im folgenden einfach Kreuzkorrelation genannt, für eine Antriebsfrequenz von  $10\text{ kHz}$  ist in Abbildung 4.3 dargestellt. In den experimentellen Daten ist ein lokales Maximum bei den Parameterwerten  $\lambda = -0,02$ ,  $\sqrt{2D} = 0,5V$  zu erkennen, in dem die Kreuzkorrelation höher als am unteren Bildrand bei  $\lambda = 0$  (einzelnes, ungekoppeltes Element) ist. Die Abbildung 4.4 zeigt Schnitte durch 4.3 für zwei Kopplungsstärken ( $\lambda = 0$ ,  $\lambda = -0,025$ ). Die Kurve für endliche Kopplungsstärke (schwarze Kreise) liegt über der für ein einzelnes, ungekoppeltes Element (rote Kreuze). Die Lage des experimentell ermittelten lokalen Maximums der Kreuzkorrelation stimmt mit dem aus Gleichung (4.11) überein. Die theoretische Erklärung gibt also das Systemverhalten in diesem Parameterbereich gut wieder, obwohl durch die Diskretisierung Teile der Systemdynamik vernachlässigt wurden. Das Verhalten für andere Antriebsfrequenzen ist qualitativ mit dem hier gezeigten vergleichbar, die Lage des Extremums ist jedoch für niedrigere Antriebsfrequenzen zu kleineren Rauschstärken verschoben.

Das theoretische Ergebnis (4.11) zeigt bei Variation der Frequenz eine Debye-Kurve. Um diesen Aspekt der Theorie zu überprüfen, habe ich Rauschen und Kopplungsstärke auf feste Werte gesetzt, die Signalfrequenz variiert und die Kreuzkorrelation zwischen Signal und Antwort bestimmt. Ein Teil der

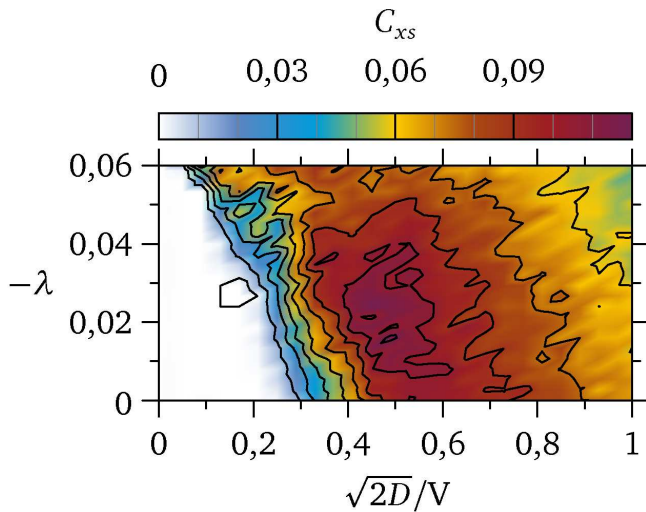
<sup>1</sup> Das ist möglich, da ausschließlich periodische Eingangssignale untersucht wurden.



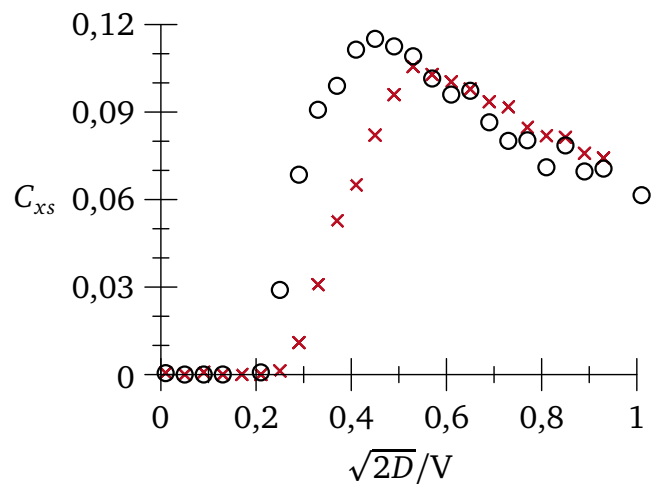
**Abbildung 4.1.:** Theorie: Aus Gleichung (4.11) ermittelte Kreuzkorrelation aufgetragen gegen die Kopplungsstärke  $\lambda$  und Rauschstärke  $\sqrt{2D}$ . Am unteren Bildrand ist stochastische Resonanz für ein einzelnes Element erkennbar. Um die Parameterwerte  $\lambda = -0,02$ ,  $\sqrt{2D} = 0,6V$  befindet sich ein Gebiet mit im Vergleich dazu erhöhter Kreuzkorrelation, vgl. auch Abb. 4.2.



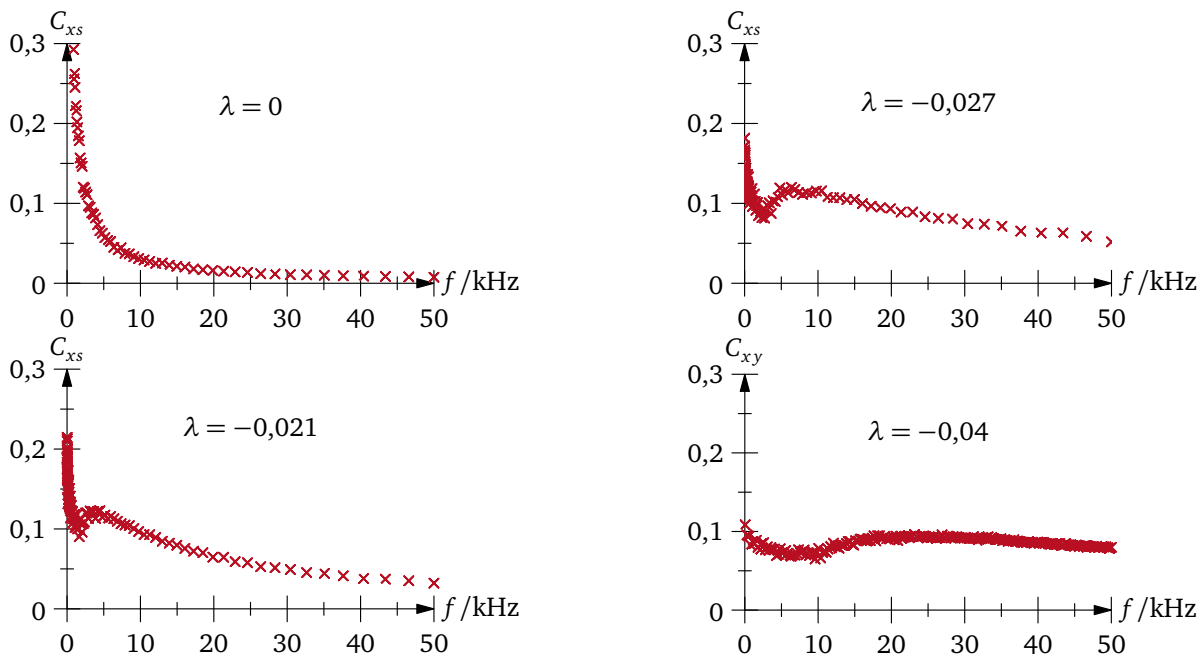
**Abbildung 4.2.:** Theorie: Vergleich der stochastischen Resonanz eines einzelnen Elements (rote Kreuze) mit der verbesserten stochastischen Resonanz durch die endliche Kopplungsstärke bei  $\lambda = -0,02$  (schwarze Kreise)



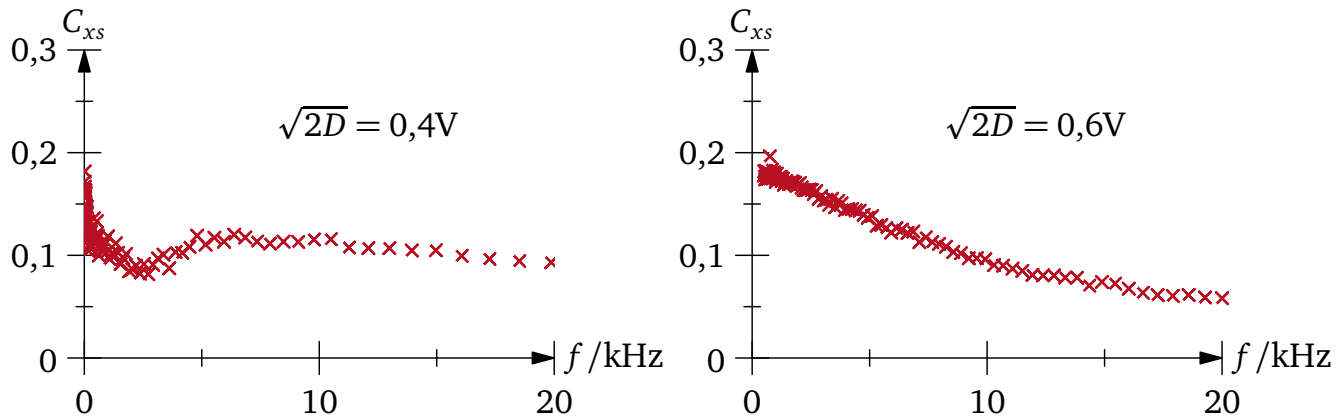
**Abbildung 4.3.:** Experiment: Kreuzkorrelation eines Elements, abhängig von Kopplungsstärke  $\lambda$  und Rauschstärke  $\sqrt{2D}$ . Am unteren Bildrand ist stochastische Resonanz für ein einzelnes Element erkennbar, um die Parameterwerte  $\lambda = -0,02$ ,  $\sqrt{2D} = 0,5V$  befindet sich ein Gebiet mit im Vergleich dazu erhöhter Kreuzkorrelation, vgl. auch Abb. 4.4.



**Abbildung 4.4.:** Experiment: Vergleich der stochastischen Resonanz eines einzelnen Elements (rote Kreuze) mit der verbesserten stochastischen Resonanz durch die endliche Kopplungsstärke  $\lambda = -0,02$  (schwarze Kreise)



**Abbildung 4.5.:** Kreuzkorrelation  $C_{xs}$  zwischen Eingangssignal und Antwort eines Schmitt-Triggers für konstante Rauschstärke  $\sqrt{2D} = 0,4$  V und variable Frequenz bei unterschiedlichen Kopplungsstärken. Die experimentell ermittelten Daten weichen deutlich von den theoretisch erwarteten (Debye-Linie) ab, das lokale Maximum und das lokale Minimum wandern für stärkere Kopplung zu höheren Frequenzen.



**Abbildung 4.6.:** Kreuzkorrelation  $C_{xy}$  zwischen Signal und Antwort eines Schmitt-Triggers für konstante Kopplungsstärke  $\lambda = -0,027$  und variable Frequenz bei unterschiedlichen Rauschstärken. Die lokalen Extrema werden bei Erhöhung des Rauschens deutlich schwächer.

gewonnenen Daten ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Die experimentellen Daten folgen nur bei ausgeschalteter Kopplung dem erwarteten Verlauf. Für endliche Kopplungsstärke weisen sie stattdessen ein lokales Maximum und ein lokales Minimum auf. Für stärkere Kopplung verschieben sich die beiden Extrema zu höheren Frequenzen. Betrachte ich die mittleren Übergangsraten eines Elements bei der entsprechenden Kombination von Rauschstärke und Kopplungsstärke, so finde ich, dass die mittlere Übergangsrate  $\langle T \rangle^{-1}$  ungefähr der Signalfrequenz an der Position des Minimums entspricht. Die Abweichungen von der Debye-Linie kann ich also wie folgt erklären:

Durch eine endliche Kopplungsstärke und Rauschen kann das System, wie in Kapitel 3.4 gezeigt, kohärente Oszillationen zeigen. Die Oszillationen der einzelnen Elemente sind zueinander um  $120^\circ$  phasenverschoben. Synchronisiert nun ein einzelnes Element auf das treibende Signal, so bedeutet das, dass dieses Element die Synchronisation der anderen beiden Elemente auf das Antriebssignal behindert. Da alle Elemente gleichberechtigt sind, wird insgesamt die Synchronisation der einzelnen Elemente auf den Antrieb unterdrückt. Für diese Deutung spricht vor allem auch, dass die Parameterwerte, bei denen dieser Effekt zu beobachten ist, genau diejenigen sind, bei denen auch Kohärenzresonanz auftritt. Um diesen Effekt zu unterdrücken, muss man die Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Elementen aufbrechen. Das geschieht entweder durch das Abschalten der Kopplung oder durch stärkeres Rauschen, wie man in Abbildung 4.6 sehen kann. Die Extrema sind bei stärkerem Rauschen fast verschwunden; die kohärente, um  $120^\circ$  phasenverschobene Systemdynamik wurde durch das stärkere Rauschen unterdrückt.

Die im Kapitel 3.4 beschriebene kooperative Dynamik des Systems bei endlicher Kopplungsstärke unter Rauscheinfluss ist also tatsächlich für diese Abweichungen der experimentellen Ergebnisse vom theoretisch erwarteten Verlauf verantwortlich. Durch die Diskretisierung des Systems bei der Herleitung von Gleichung (4.11) habe ich eine wichtige Zeitskala des Systems vernachlässigt: die Umschaltzeit, die für das Auftreten von Kohärenzresonanz mitverantwortlich ist. Die theoretische Betrachtung zeigt weder Kohärenzresonanz noch ist sie dadurch in der Lage, das auftretende Mischen von stochastischer und Kohärenzresonanz zu reproduzieren. Außerdem ist in die Herleitung eingeflossen, dass sich das periodische Signal nur langsam gegenüber den stochastischen Übergängen ändert. Die Übereinstimmung zwischen den theoretischen (Abb. 4.1) und den experimentellen Ergebnissen (Abb. 4.3) zeigt jedoch, dass das Systemverhalten durch die theoretische Beschreibung zumindest in Teilen richtig wiedergegeben wird.

---

## 5 Ring aus vier Schmitt-Triggern

Wie im vorhergehenden Kapitel dargestellt, treten in Systemen, die eine Eigendynamik besitzen, sowohl Kohärenzresonanz als auch stochastische Resonanz mit den im letzten Abschnitt beschriebenen Abweichungen vom theoretisch erwarteten Verhalten auf. Um diese Effekte näher zu beleuchten, betrachte ich einen gerichteten Ring aus vier invertierend gekoppelten Elementen. Stemler u. a. [2004] haben ein solches Experiment mit vier gekoppelten Schmitt-Triggern vorgestellt, an dem verbesserte stochastische Resonanz nachgewiesen worden ist. Die Systemgeometrie entspricht der in Abbildung 2.1 gezeigten, die Kopplung ist, wie beim Ring aus drei Schmitt-Triggern, invertierend und gerichtet. Da das System allerdings aus einer *geraden* Anzahl von Elementen besteht, können hier keine stabilen Autooszillationen beobachtet werden. Stattdessen nimmt das System bei hinreichend starker Kopplung einen von zwei möglichen stabilen Fixpunkten ein. Augenscheinlich unterscheiden sich die beiden untersuchten Systeme also deutlich voneinander. Man würde daher erwarten, dass das Systemverhalten unter Rauscheinfluss ebenso ausgeprägte Unterschiede zeigt.

Im folgenden Abschnitt stelle ich die Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen diesem und dem in Kapitel 3 vorgestellten System dar. Die Stabilitätsanalyse des Systems zeigt, zusammen mit den im vorhergehenden Kapitel gezogenen Schlüssen, wie groß die Unterschiede im erwarteten dynamischen Verhalten unter Einfluss von Rauschen sind. Aus statistischen Messdaten und der Analyse von Fixpunkten kann ich so auf dynamische Effekte schließen.

---

### 5.1 Charakterisierung

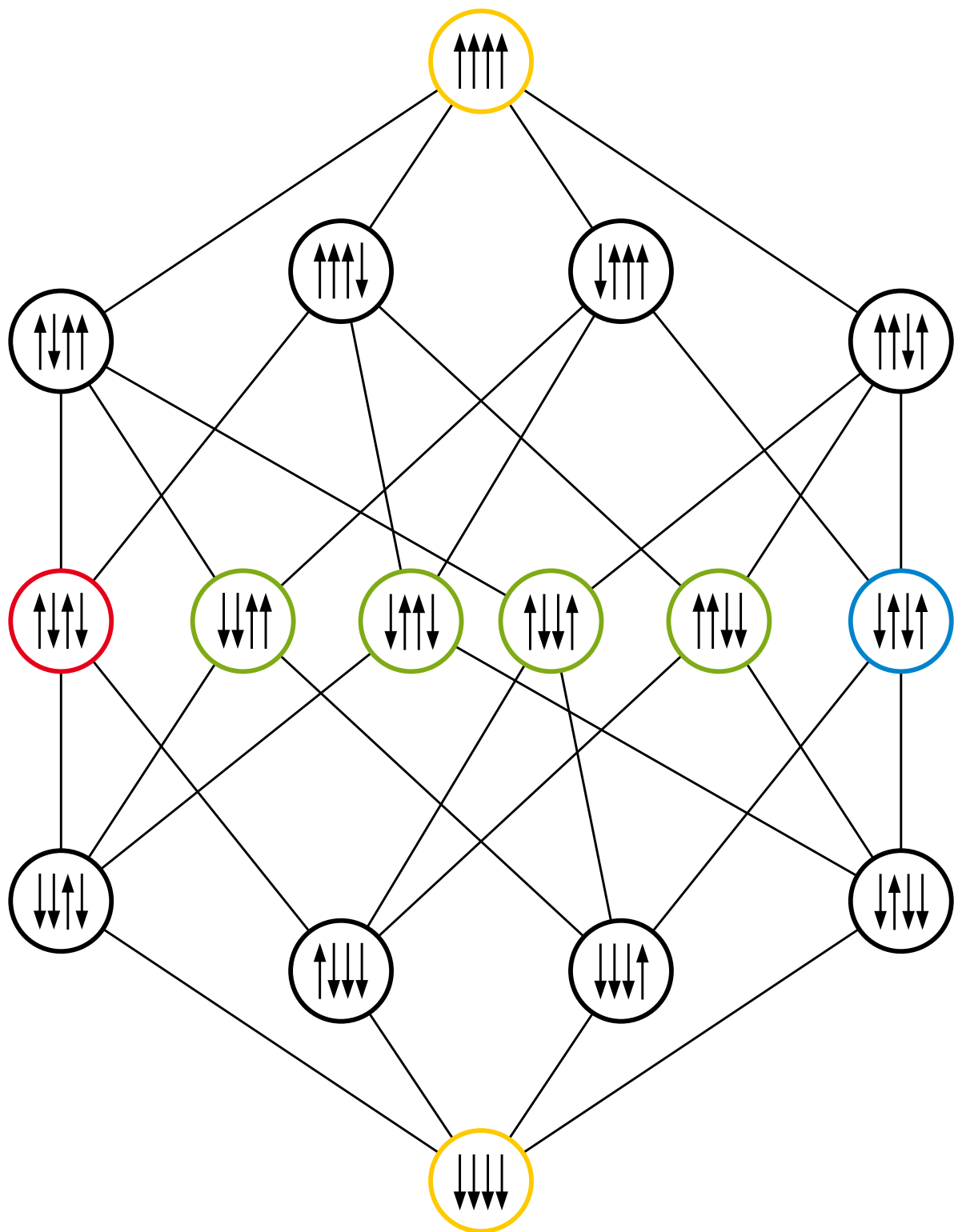
---

Eine Darstellung der Fixpunkte wie in Abbildung 3.2 für drei Elemente bei nicht zu starker Kopplung ist hier etwas komplizierter, da das System vierdimensional ist. In Abbildung 5.1 sind die stabilen Fixpunkte des Systems dargestellt. Die durchgezogenen Linien in der Abbildung entsprechen dem Umschalten eines einzelnen Elements. Die beiden für negative Kopplungsstärke stabilen Fixpunkte mit alternierender Ordnung sind rot bzw. blau markiert.

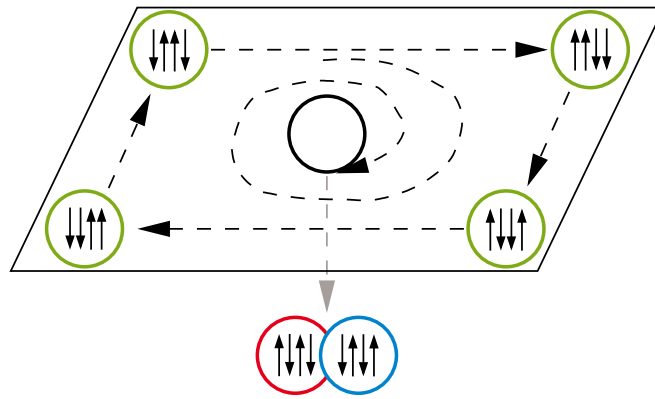
Um die Stabilität dieser Fixpunkte zu analysieren führe ich eine Stabilitätsanalyse der Fixpunkte wie in Kapitel 3 durch. Ich betrachte fünf Gruppen von Fixpunkten: den Zustand  $(0,0,0,0)$ , die Fixpunkte mit vollständig geordneten Elementen  $(\uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow)$  bzw.  $(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow)$ , die Fixpunkte mit alternierend geordneten Elementen  $(\uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow)$ , und  $(\downarrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow)$  sowie die Fixpunkte mit paarweise angeordneten Elementen, also z. B.  $(\downarrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow)$  und die Fixpunkte mit einem Element entgegengerichtet zu den anderen  $(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow)$  (sowie invertiert und zyklisch vertauscht). Die Ergebnisse fasse ich hier nur kurz zusammen und konzentriere mich dabei auf die wesentlichen Eigenschaften, die für die Erklärung des Systemverhaltens notwendig sind.

Der Zustand  $(0,0,0,0)$  besitzt vier Eigenrichtungen, eine in Richtung  $(\uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow)$ , eine zu den alternierend geordneten Fixpunkten  $(\uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow)$  und zwei komplex konjugierte, die in einer Hyperebene senkrecht zu den beiden ersten stehen. Die ersten beiden Eigenrichtungen durchlaufen bei  $\lambda_{c,0} = \pm(\gamma - 1/A)$  mit den jeweiligen in dieser Richtung liegenden Fixpunkten eine Heugabelbifurkation. Bezüglich der beiden komplexen Eigenrichtungen ist der Ursprung ein anziehender Fokus, die Umlauffrequenz ist proportional zum Betrag der Kopplungsstärke. Die Stabilitätsanalyse der Fixpunkte  $(\uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow)$  und  $(\uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow)$  (und invertiert) liefert die gleichen Bifurkationspunkte. Ansonsten sind diese Fixpunkte (so lange sie existieren) aus allen Richtungen stabil. Der vollständig geordnete Zustand verschwindet also für negative Kopplungsstärken in einer Heugabelbifurkation, der alternierend geordnete für positive.

Betrachtet man die zu  $(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow)$  analogen Fixpunkte, so würde man vermuten, dass sie bei negativer Kopplung in Richtung zum Fixpunkt mit alternierender Ordnung ihre Stabilität verlieren. Eine



**Abbildung 5.1.:** Stabile Fixpunkte des Systems. In den Kreisen ist die Konfiguration der einzelnen Elemente dargestellt. Kreise gleicher Farbe bezeichnen Fixpunkte mit gleichen Eigenschaften. Ausnahme: die beiden bei negativer Kopplungsstärke stabilen Fixpunkte mit alternierender Ordnung sind blau bzw. rot eingefärbt.



**Abbildung 5.2.:** Vereinfachte Darstellung einiger Fixpunkte zusammen mit der für die untersuchten Effekte wichtigen Vorzugsrichtungen. Der leere Kreis in der Mitte symbolisiert den Ursprung des Systems, der ein in der Ebene anziehender Fokus ist. Die grün markierten Fixpunkte mit paarweise alternierender Ordnung sind Urheber einer gerichteten Dynamik. Roter und blauer Kreis: alternierend geordnete Fixpunkte.

genauere Betrachtung der Jacobimatrix  $Df(x)$  und der Funktion  $f(x)$  zeigt jedoch, dass z. B. der Fixpunkt  $(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow)$  in Richtung der dritten Komponente seine Stabilität verliert, also in Richtung zu  $(\downarrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow)$ .

Die paarweise geordneten Fixpunkte werden über eine Sattel-Knoten-Bifurkation instabil. Die zugehörige Zentralmannigfaltigkeit zum Fixpunkt  $(\downarrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow)$  liegt beispielsweise lokal in der Richtung  $(0, 1, 0, 1)^T$ , das System schaltet also in diesem Fall in Richtung des Fixpunkts  $(\downarrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow)$ , der allerdings gleichzeitig ebenfalls instabil geworden ist. Es wird jedoch im Gegensatz zum System mit einer ungeraden Anzahl von Schmitt-Trigger kein stabiler periodischer Orbit gebildet. Dennoch existiert eine Vorzugsrichtung in der Dynamik.

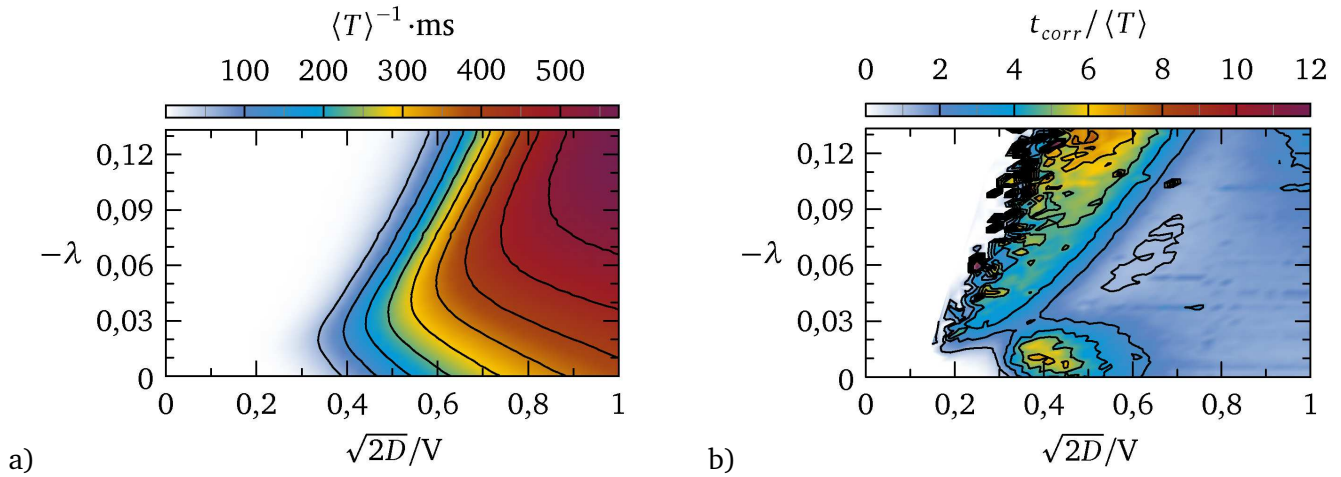
Die für die Systemdynamik wichtigen Fixpunkte sind schematisch in Abbildung 5.2 dargestellt. Die Anordnung zeigt, welche Fixpunkte gegenüber den anderen bevorzugt eingenommen werden und in welche Richtung die Fixpunkte instabil werden. Die paarweise geordneten Fixpunkte (grün) erzeugen zusammen mit dem Ursprung eine gerichtete Dynamik in einer Ebene, die das Systemverhalten deutlich beeinflusst. Das System läuft im Phasenraum spiralförmig auf den Ursprung zu, der in dieser Hyperebene ein anziehender Fokus mit einer abstoßenden Richtung  $(\uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow)$  (und invertiert) ist. Da der Ursprung sehr instabil ist und kein stabiler periodischer Orbit vorhanden ist, wird diese gerichtete Dynamik, wenn überhaupt, nur sehr kurz zu beobachten sein. Allerdings sorgt diese systemeigene Zeitskala wieder für kooperative Effekte. Sowohl Kohärenzresonanz als auch die Abweichungen der stochastischen Resonanz können wieder beobachtet werden.

Das Auftreten von Kohärenzresonanz in diesem System ist analog zum von Neiman u. a. [1997] beschriebenen: Ein System mit einem stabilen Fixpunkt und einer fokalen Dynamik kann Kohärenzresonanz zeigen, wenn Fluktuationen das System vom Ursprung wegdrücken. Es bewegt sich dann spiralförmig auf den Ursprung zu, wird aber durch fortlaufende Störungen wieder von ihm wegbewegt. Bei einer passenden stochastischen Aktivierungszeit, die von der Umlauffrequenz und dem Lyapunovexponenten des Systems abhängt, kann das System kohärente Dynamik zeigen.

## 5.2 Kohärenzresonanz und stochastische Resonanz

Im vorhergehenden Abschnitt habe ich die Unterschiede zum System mit drei Schmitt-Trigger erläutert und die Bifurkationen der wichtigsten Fixpunkte analysiert. Im Folgenden zeige ich die dazugehörigen experimentellen Ergebnisse sowie den Vergleich mit der theoretischen Betrachtung der stochastischen





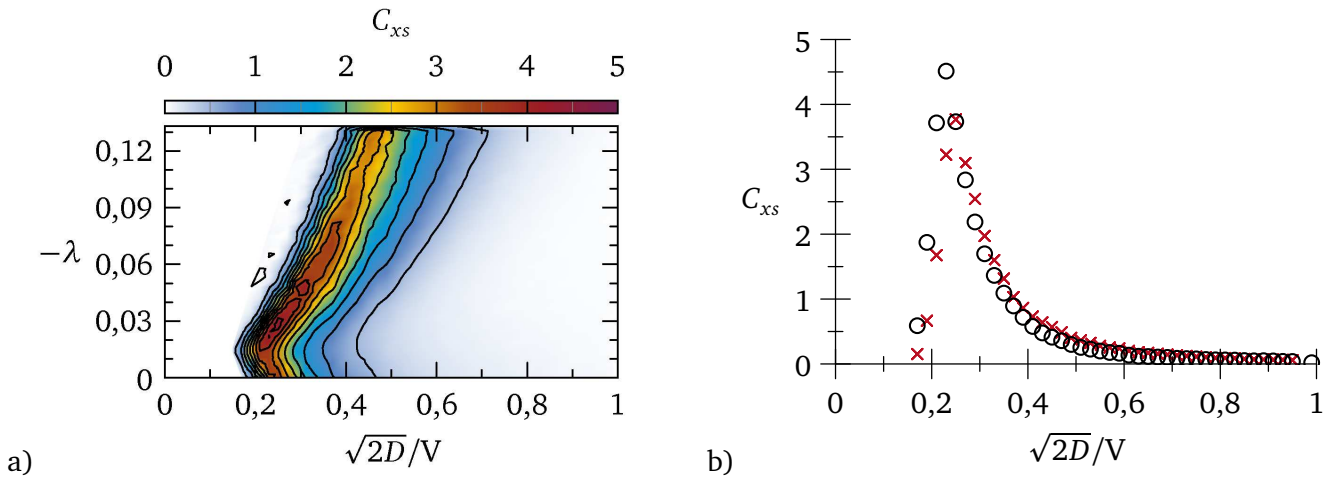
**Abbildung 5.3.:** a) Mittlere Übergangsrate eines einzelnen Elements in Abhängigkeit von Rauschstärke  $\sqrt{2D}$  und Kopplungsstärke  $\lambda$ . b) Normierte Korrelationszeit des Systems. Es tritt Kohärenzresonanz auf, der Effekt ist jedoch deutlich schwächer als im System mit drei Schmitt-Triggern.

Resonanz. Abbildung 5.3a zeigt die mittlere Übergangsrate des Systems, in b ist die normierte Korrelationszeit dargestellt. Bei einer Kopplungsstärke von ca.  $\lambda = -0,02$  gibt es ein kleines Gebiet, in dem Kohärenzresonanz auftritt.

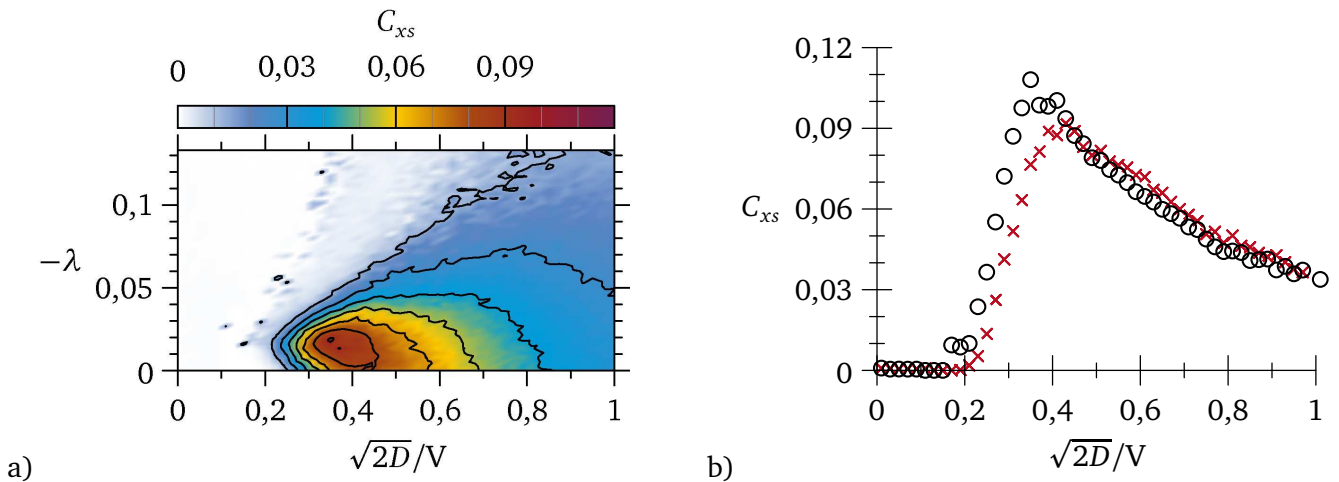
Wie in Kapitel 4 berechne ich die Kreuzkorrelation zwischen einem Element und dem Eingangssignal. In die erhaltene Formel setze ich die experimentell ermittelten Größen ein. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.4 dargestellt, in Teil a als Farb- und Konturabbildung, in b zwei Schnitte für konstante Kopplungsstärke ( $\lambda = 0, \lambda = -0,02$ ). Die experimentell gewonnenen Daten für die Kreuzkorrelation sind in Abbildung 5.5 dargestellt.

Genau wie im System mit drei unidirektional gekoppelten Schmitt-Triggern finde ich auch hier bei den Parameterwerten der Kohärenzresonanz Abweichungen vom erwarteten Verhalten. Die entsprechenden Messwerte sind in Abbildung 5.6 dargestellt. Die lokalen Maxima liegen bei den Frequenzen der rauscherzeugten kohärenten Dynamik aus Abbildung 5.3. Auch hier findet offensichtlich ein Wechselspiel zwischen der Kohärenzresonanz und der stochastischen Resonanz statt.

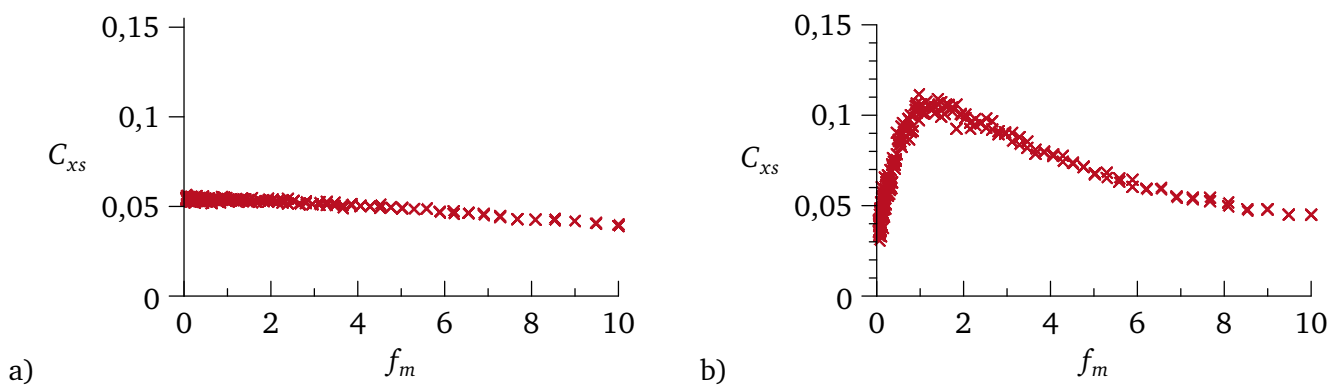




**Abbildung 5.4.:** a) Theoretisches Ergebnis für die Kreuzkorrelation zwischen einem Element und dem Antriebssignal abhängig von Rauschstärke  $\sqrt{2D}$  und Kopplungsstärke  $\lambda$  bei einer Antriebsfrequenz von 10 kHz. Experimentelle Daten wurden als Abschätzung für die benötigten theoretischen Größen in der errechneten Kreuzkorrelation verwendet, vgl. auch Kap. 4. b) Schnitt durch Teil a) für konstante Kopplungsstärken:  $\lambda = 0$  (rote Kreuze),  $\lambda = -0,02$  (schwarze Kreise).



**Abbildung 5.5.:** a) Gemessene Kreuzkorrelation zwischen einem Element und dem Antriebssignal abhängig von Rauschstärke  $\sqrt{2D}$  und Kopplungsstärke  $\lambda$  bei einer Antriebsfrequenz von 10 kHz. b) Schnitt durch Teil a) für  $\lambda = 0$  (rote Kreuze) und  $\lambda = -0,02$  (schwarze Kreise). Die Kreuzkorrelation im ausgedehnten System ( $\lambda < 0$ ) ist gegenüber dem Einzelelement ( $\lambda = 0$ ) erhöht.



**Abbildung 5.6.:** Korrelation eines Elements ohne Kopplung a) und bei einer Kopplungsstärke von  $\lambda = -0,027$  b) in Abhängigkeit von der Signalfrequenz. Es existiert ein starkes lokales Maximum bei  $f_m = 1$  kHz für endliche Kopplung bei den Parameterwerten, bei denen auch Kohärenzresonanz stattfindet. Das Maximum entspricht der mittleren Schaltfrequenz des Systems bei der Kohärenzresonanz, vgl. auch Abb. 5.3.

## 6 Phasenoszillatoren

In den Kapiteln 2-5 habe ich Systeme untersucht, die aus mehreren, gleichartigen Elementen bestanden, die untereinander gekoppelt waren. Die Analyse des Systemverhaltens unter Einfluss von Fluktuationen gestaltet sich relativ kompliziert, da sich die Elemente durch die Kopplung gegenseitig beeinflussen. Dadurch muss man bei der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten komplizierte bedingte Wahrscheinlichkeiten berücksichtigen. Einen wichtigen Teil des Systemverhaltens kann man jedoch auch auf ein einfacheres Modell abbilden. Hierzu betrachte ich, wie in Kapitel 3.1, die Anordnung der stabilen Fixpunkte vor der Sattel-Knoten-Bifurkation im Phasenraum und die Vorzugsrichtungen für die Umschaltdynamik. Die für die Dynamik wichtigen stabilen und instabilen Fixpunkte sind noch einmal in Abbildung 6.1a dargestellt. Ich reduziere jetzt das System auf ein Modell mit nur noch einem stabilen und einem instabilen Fixpunkt, die durch ihre Mannigfaltigkeiten verbunden sind. Dieses System ist schematisch in Abbildung 6.1b dargestellt. Bei Variation eines Systemparameters können die beiden Fixpunkte aufeinander zulaufen und in einer Sattel-Knoten-Bifurkation verschwinden. Aus dieser Bifurkation resultiert, wie auch in Kapitel 3 gezeigt, eine Grenzzyklus-Separatrix. Im Folgenden zeige ich, welche Eigenschaften dieses System hat und weise numerisch nach, dass die bei Ringen aus mehreren Elementen auftretenden Effekte auch hier in Erscheinung treten.

Als einfaches Modellsystem nehme ich einen Phasenoszillator mit dem Potential

$$U(x) = -kx + \epsilon \sin(x), \quad (6.1)$$

den ich auf ein Intervall  $x \in (a, b]$  mit periodischen Randbedingungen einschränke. Die Intervallgrenzen sind die lokalen Maxima um die Position  $x = 0$ . Sie lassen sich für den Fall, dass  $\epsilon > k$  gilt, aus  $U'(x) = 0$  leicht berechnen:

$$a = -2\pi + \arccos\left(\frac{k}{\epsilon}\right) \quad (6.2)$$

$$b = \arccos\left(\frac{k}{\epsilon}\right) \quad (6.3)$$

Die zugehörige stochastische Differentialgleichung lautet

$$dx = (-k + \epsilon \cos(x)) dt + \sqrt{2D} dW_t, \quad (6.4)$$

mit der Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{d}{dt}p = -\frac{d}{dx} [(-k + \epsilon \cos(x))p] + \frac{d^2}{dx^2} [Dp], \quad (6.5)$$

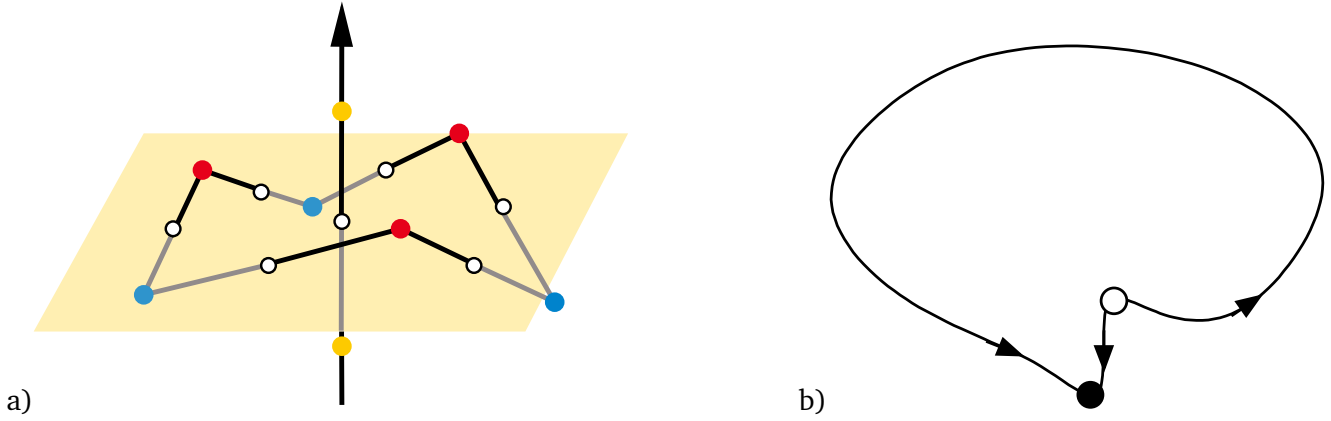
wobei  $p = p(x, t|x_0, t_0)$  sei. Die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte  $p_s(x)$  kann man aus dem Wahrscheinlichkeitsdichtestrom  $J(x)$  berechnen:

$$J(x) = (-k + \epsilon \cos(x))p - \frac{d}{dx} [Dp] \quad (6.6)$$

Mit den periodischen Randbedingungen

$$p_s(a) = p_s(b) \quad (6.7)$$

$$J(a) = J(b), \quad (6.8)$$



**Abbildung 6.1.:** a) Relative Lage der stabilen Fixpunkte der frustrierten Elemente zueinander. Zwischen zwei stabilen Fixpunkten (gefüllte Kreise) liegt auf deren Verbindungsline ein instabiler Fixpunkt (leere Kreise). b) Dasselbe Bild für ein System mit nur einem stabilen und einem instabilen Fixpunkt.

und der Vermutung, dass der Wahrscheinlichkeitsdichtestrom an den Rändern des Intervalls nicht verschwindet, kann man der Methode von Gardiner [1990], Kap. 5.2.2 b) folgen. Demnach sei die Hilfsfunktion

$$\psi(x) = \exp \left\{ \frac{U(a) - U(x)}{D} \right\}. \quad (6.9)$$

Der Wahrscheinlichkeitsdichtestrom beträgt (nach Integration der Gleichung und Einsetzen der Randbedingungen)

$$J = D \left[ \frac{1}{\psi(b)} - 1 \right] p_s(a) \left[ \int_a^b \frac{dx'}{\psi(x')} \right]^{-1}. \quad (6.10)$$

Daraus folgt für die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p_s(x) = \frac{p_s(a)\psi(x)}{\int_a^b \frac{dx'}{\psi(x')}} \cdot \left[ \frac{1}{\psi(b)} \cdot \int_a^x \frac{dx'}{\psi(x')} + \int_x^b \frac{dx'}{\psi(x')} \right]. \quad (6.11)$$

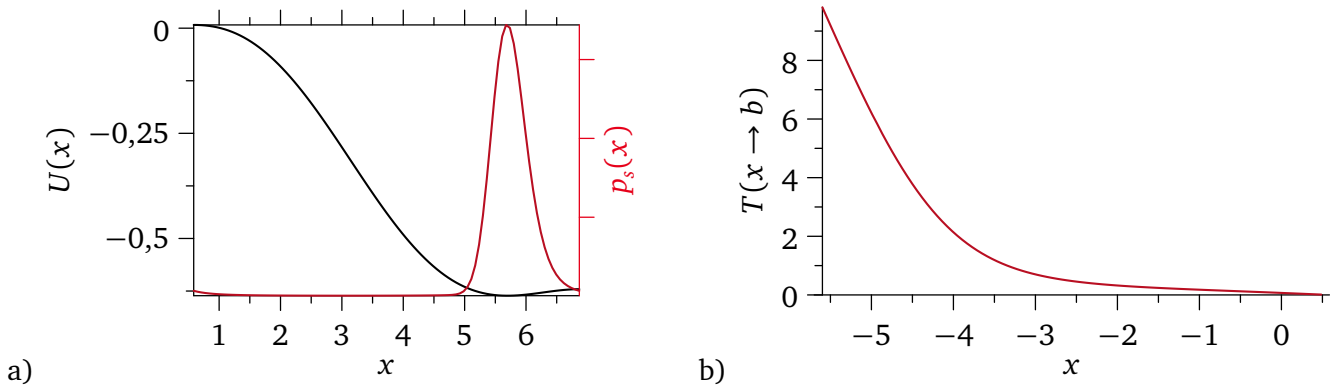
Dieses Ergebnis ist für eine relativ niedrige Rauschstärke in Abbildung 6.2 noch einmal zusammen mit dem Potential dargestellt. Die Berechnung erfolgt numerisch mit Asymptote. Die Parameterwerte des Potentials betragen  $k = 0,1$ ,  $\epsilon = 0,12$ .

Eine für die Betrachtungen der Kohärenzresonanz wichtige Größe ist die mittlere Fluchtzeit aus dem Intervall  $(a, b]$ . Hierfür setzt man zur Zeit  $t = 0$  ein Teilchen an die Stelle  $x$  und betrachten die Wahrscheinlichkeit, dass es sich zur Zeit  $T > t$  noch im Intervall aufhält. Analog zu den Annahmen bei [Pikovsky und Kurths, 1997] ist die obere Intervallgrenze reflektierend, die untere absorbierend. Das Teilchen wird also das Intervall  $(a, b]$  nur an der Stelle  $b$  verlassen können. Durch Integration der zeitumkehrten Fokker-Planck-Gleichung erhalte ich für die mittlere Verweildauer

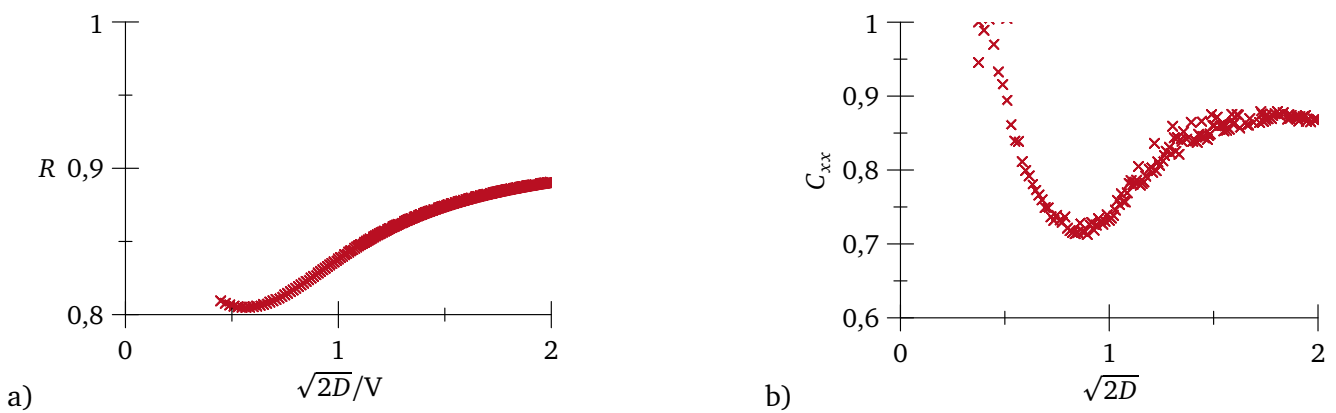
$$T(x \rightarrow b) = \frac{1}{D} \int_x^b dy \frac{1}{\psi(y)} \int_a^y dz \psi(z) \quad (6.12)$$

und ihre Varianz

$$\text{var}(T(x \rightarrow b)) = \frac{1}{D} \int_x^b dy \frac{1}{\psi(y)} \int_a^y dz T(z \rightarrow b) \cdot \psi(z). \quad (6.13)$$



**Abbildung 6.2.:** a) Potential  $U(x)$  (schwarz), stationäre Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung  $p_s(x)$  (rot). b) Fluchtzeit  $T(x \rightarrow b)$ . Parameter:  $k = 0,1$ ,  $\epsilon = 0,12$ ,  $D = 0,1$ .

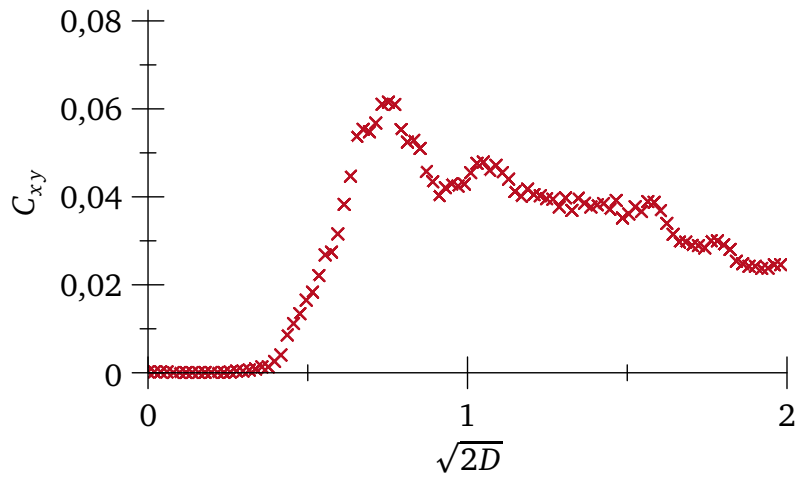


**Abbildung 6.3.:** Normierte Standardabweichung der Verweildauern  $R$ . Vergleich der theoretischen Ergebnisse a) aus Gleichungen (6.12, 6.13) mit direkt aus numerischer Integration b) der Differentialgleichung (6.1) gewonnenen Daten. Verhältnis der Varianz der Verweildauer zur Verweildauer im Intervall  $(a, b)$  aufgetragen gegen die Rauschstärke. Bei der Rauschstärke  $\sqrt{2D} \approx 0,8$  nimmt das Verhältnis ein Minimum an, dort kann man also Kohärenzresonanz beobachten.

Der Verlauf der normierten Standardabweichung  $R$  ist in Abbildung 6.3a gegen die Rauschstärke  $\sqrt{2D}$  aufgetragen. Die Werte habe ich durch numerische Integration unter Matlab berechnet. Bei  $\sqrt{2D} \approx 0,8$  nimmt das Verhältnis  $R$  ein Minimum an, dort kann man also Kohärenzresonanz beobachten. Die aus direkter numerischer Simulation erhaltenen Daten in Abbildung 6.3b zeigen denselben Verlauf. Die durch numerische Integration gewonnenen Daten beginnen erst bei einer relativ hohen Rauschstärke, da vorher die numerische Integration mit den in Matlab implementierten Verfahren instabil ist, die Integrale konvergieren nicht.

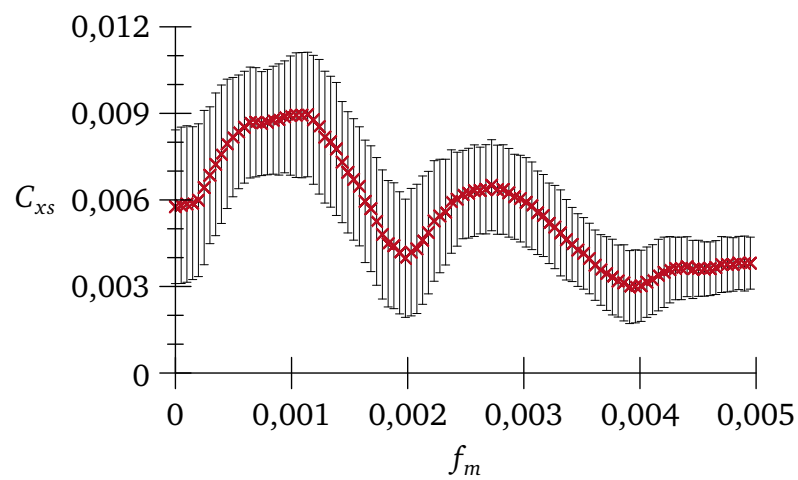
In Phasenoszillatoren kann man bei denselben Parametern auch stochastische Resonanz beobachten. Simulationsdaten sind in Abbildung 6.4 dargestellt. Die Frequenz beträgt  $25 \cdot 10^{-3}$ , die Amplitude beträgt 0,01. Die Parameter des Potentials sind  $k = 0,1$ ,  $\epsilon = 0,12$ . Auch hier gibt es eine nichtverschwindende Rauschstärke  $\sqrt{2D} \approx 0,8$ , bei der die Kohärenz zwischen Eingangs- und Ausgangssignal besonders gut ist.

Um meine These zu überprüfen, die besagt, dass die gerichtete Dynamik mit einer eigenen, von den Systemparametern bestimmten Zeitskala für die in Kapitel 4 diskutierten Abweichungen von der theoretisch vorhergesagten Linienform verantwortlich ist, betrachte ich die Kreuzkorrelation zwischen einem Eingangssignal und der Systemantwort für unterschiedliche Frequenzen. Da bei kleinen Frequenzen lan-



**Abbildung 6.4.:** Stochastische Resonanz bei einem Phasenoszillator, Systemparameter  $k = 0,1$  und  $\epsilon = 0,12$ , Antriebsfrequenz  $f = 25 \cdot 10^{-3}$ . Bei einer Rauschstärke von  $\sqrt{2D} \approx 0,8$  ist die Kreuzkorrelation zwischen Eingangs- und Ausgangssignal am besten.

ge Zeitreihen nötig sind, die aber mit einer großen Datenmenge einhergehen würden, habe ich die Kreuzkorrelation aus vielen Simulationsdurchläufen bestimmt und gemittelt. Als Abschätzung für den Fehler habe ich die Standardabweichung der Kreuzkorrelation angenommen. Die Daten sind in Abbildung 6.5 dargestellt. Genau wie in Kapitel 4 finde ich auch Abweichungen der Kreuzkorrelation vom theoretisch erwarteten Verlauf. Die Positionen der Maxima liegen bei Vielfachen der mittleren Übergangsrate des Systems bei den Parameterwerten der Kohärenzresonanz  $\langle T \rangle^{-1} \approx 0,12$ . Genau wie in Kapitel 4 und 5 lassen sich die Strukturen also mit der systemeigenen Zeitskala in Verbindung bringen.



**Abbildung 6.5.:** Kreuzkorrelation zwischen Eingangssignal und Systemantwort des Phasenoszillators (rote Kreuze) in Abhängigkeit von der Signalfrequenz  $f_m$ . Die Fehlerbalken geben die Standardabweichung der Simulationsdaten an. Die Daten zeigen deutliche Maxima bei den Frequenzen, die Vielfachen der mittleren Übergangsrate bei der Kohärenzresonanz entsprechen.





---

## 7 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit habe ich das Auftreten verbesserter stochastischer Resonanz in ausgedehnten Systemen untersucht. Hierfür habe ich zwei Systeme, bei denen unterschiedliches Verhalten beobachtet worden ist [Palacios u. a., 2006; Stemler u. a., 2004], näher betrachtet. Die beiden in Kapitel 3 und 5 vorgestellten Systeme sind gerichtete Ringe aus invertierend gekoppelten bistabilen Elementen. Sie bestehen im ersten Fall aus drei Schmitt-Triggern, im zweiten Fall aus vier.

Der offensichtliche Unterschied zwischen diesen beiden Systemen ist, dass im ersten System ab einer gewissen Kopplungsstärke Autooszillationen auftreten können, während das zweite System in einen stabilen Zustand relaxiert. Die Autooszillationen treten bei gerichteten Ringen aus bistabilen Elementen auf, wenn die Kopplung invertierend (und stark genug) ist und der Ring aus einer ungeraden Zahl von Elementen besteht. Die durch die invertierende Kopplung bevorzugte alternierende Anordnung kann in diesem Fall nämlich nicht eingenommen werden; es wird immer mindestens an einer Stelle eine Frustration vorliegen. Bei einer geraden Zahl von Elementen kann das System vollständig alternierend ordnen.

Umso erstaunlicher ist es, dass die beiden Systeme dennoch gewisse Ähnlichkeiten aufweisen. Die in Kapitel 3 und 5 durchgeführten Stabilitätsanalysen enthüllen eine wichtige Gemeinsamkeit: Es existiert um den Phasenraumursprung herum eine gerichtete Dynamik, die dem System eine eigene Zeitskala aufprägen kann. Diese Dynamik tritt bei einer ungeraden Anzahl von Elementen deutlich ausgeprägter auf als bei einer geraden, da sich im ersten Fall ein stabiler Orbit im Phasenraum bilden kann. Sie existiert dennoch in beiden Systemen. Diese gerichtete Dynamik ist für das Auftreten von Kohärenzresonanz verantwortlich, dem spontanen Auftreten kohärenter Systemdynamik, wie es auch schon Neiman u. a. [1997] an einem stabilen Fokus und Pikovsky und Kurths [1997] bei einem Aktivierungssystem gezeigt haben.

Meine Überlegungen zur stochastischen Resonanz in diesen Systemen führen zu Gleichungen, wie sie schon für Einzelsysteme bekannt waren [McNamara und Wiesenfeld, 1989]. Ausgehend von diesen Gleichungen habe ich das Systemverhalten unter periodischem Antrieb an Hand von experimentell ermittelten statistischen Größen der rauschgetriebenen Systemdynamik abgeschätzt. Diese Abschätzungen für die Kreuzkorrelation beruhen auf einer Diskretisierung der Systemdynamik und auf der Annahme, dass die externen Signale langsam sind. Sie zeigen auf den ersten Blick qualitativ ähnliches Verhalten wie die experimentell ermittelten Daten. Bei genauerer Betrachtung gibt es jedoch deutliche Abweichungen der experimentellen Daten von den theoretischen Kurven: Misst man die Kreuzkorrelation zwischen Eingangssignal und der Antwort eines einzelnen Elements unter Variation der Antriebsfrequenz, findet man bei drei Elementen Verstärkung und Abschwächung der stochastischen Resonanz, bei vier Elementen nur Verstärkung. Bei drei Elementen sorgt die nach der Sattel-Knoten-Bifurkation entstehende Grenzzyklus-Separatrix für eine Abschwächung der stochastischen Resonanz, das Minimum liegt bei der Frequenz der spontan auftretenden kohärenten Systemdynamik. Bei vier Elementen gibt es keine Abschwächung der stochastischen Resonanz, nur eine Verstärkung, da in diesem System keine Grenzzyklus-Separatrix entsteht. Da man in der theoretischen Analyse keine kooperative Dynamik findet, sind die Abweichungen der experimentellen Ergebnisse von den theoretischen Abschätzungen nicht verwunderlich.

Die Beobachtungen führen zur Annahme, dass die gerichtete Komponente der Systemdynamik nicht nur für das Auftreten von Kohärenzresonanz verantwortlich ist, sondern auch für die beobachteten Abweichungen der experimentellen Daten von den theoretischen Linienformen. Ich kann also die groben Aussagen über das Auftreten von stochastischer Resonanz (Kap. 4) verbessern, indem ich eine Stabilitätsanalyse einiger Fixpunkte durchführe.

---

Um diese These zu überprüfen, habe ich die Dynamik eines einfachen Modellsystems untersucht: ein Phasenoszillator, der zyklisch auf einem  $2\pi$ -Intervall definiert ist. Dieses System zeigt unter Variation der Parameter eine Sattel-Knoten-Bifurkation, nach der sich das System mit einer endlichen Phasengeschwindigkeit zyklisch auf dem Intervall bewegt. Unterhalb dieses Bifurkationspunkts kann Kohärenzresonanz auftreten. Es existiert also wieder ein Wechselspiel zwischen der stochastischen Anregung des Systems und einem deterministischen Prozess, dem Reinjektionsprozess in das Intervall. Des Weiteren finde ich in diesem System stochastische Resonanz. Bei Variation der Frequenz beobachtet man lokale Extrema in der Korrelation zwischen Antriebssignal und Systemantwort. Die Position des ersten Maximums entspricht genau der mittleren Übergangsrate bei Kohärenzresonanz. Diese Ergebnisse bestätigen die Annahme, dass die gerichtete Dynamik in den untersuchten Systemen nicht nur für das Auftreten von Kohärenzresonanz verantwortlich ist, sondern auch bei der stochastischen Resonanz eine wichtige Rolle spielt.

Für das Auftreten von verbesserter stochastischer Resonanz spielen also nicht alleine die Besetzungswahrscheinlichkeiten von bestimmten Zuständen und die unterschiedlichen Übergangsraten zwischen verschiedenen Fixpunkten eine Rolle, sondern vor allem auch die unterschiedlichen komplexen Eigenwerte dieser Fixpunkte, die für eine gerichtete Dynamik in diesen Systemen verantwortlich sind. Diese Aspekte werden in den bisherigen Theorien [Rozenfeld und Schimansky-Geier, 2000; Lindner u. a., 2006], die sich hauptsächlich mit statistischen Eigenschaften der Systeme beschäftigt haben, nicht berücksichtigt. Die hier vorgestellten Untersuchungen sollen dazu dienen, verbesserte stochastische Resonanz in ausgedehnten Systemen unter diesem zusätzlichen Gesichtspunkt zu betrachten und die aktuellen Theorien entsprechend zu erweitern.

# A Systeme mit Zeitverzögerung

Ausgedehnte Systeme mit vielen Freiheitsgraden sind aufwendig zu analysieren, die Experimente sind schwierig aufzubauen und auch die numerischen Experimente sind mit einer großen Menge an Daten verbunden, wenn die Zustände aller Teilsysteme analysiert und gespeichert werden. Im Folgenden werde ich kurz darstellen, auf welche Weise die bisher vorgestellten Experimente noch zusammengefasst werden können.

Die beiden in den Kapiteln 2-5 untersuchten Systeme bestehen aus mehreren Elementen, die unidirektional gekoppelt waren. Das System von Differentialgleichungen hat die Form

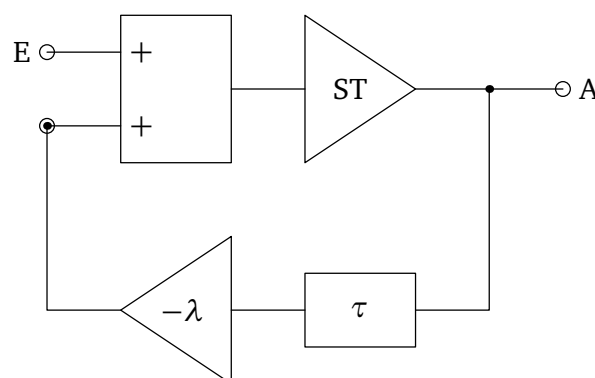
$$\dot{x}_i = f(x_i, x_{i-1}, y), \quad (\text{A.1})$$

wobei  $x_i$ ,  $x_{i-1}$  die Zustände des  $i$ -ten bzw.  $(i - 1)$ -ten Elements sind und  $y$  einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess symbolisiert. Die Zustände  $x_i$  hängen also von ihren Vorgängerelementen ab. Da die Elemente im Ring gekoppelt sind, hängt dadurch jedes Element auch von seinem eigenen Zustand ab, allerdings nicht vom aktuellen sondern von einem in der Vergangenheit liegenden, da alle Elemente eine gewisse Trägheit in ihrem Antwortverhalten besitzen. Die einfachste mögliche Abhängigkeit eines Elements von seiner Vergangenheit ist die lineare Rückkopplung eines um die Zeit  $\tau$  zeitverzögerten Funktionals des Systems in den aktuellen Zustand. Es resultiert eine Differentialgleichung mit einem zeitverzögerten Term:

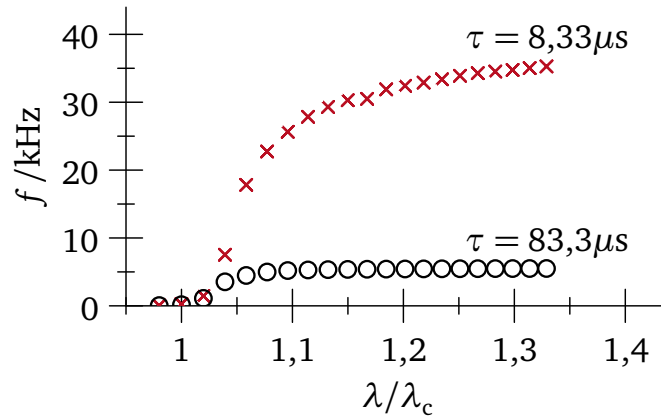
$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), x_{i-1}(t - \tau), y) \quad (\text{A.2})$$

Die theoretische Analyse dieser Differentialgleichung ist nur für bestimmte Systeme möglich, da der Zustandsraum des Systems unendlichdimensional ist. Auf der anderen Seite ist die experimentelle Realisierung einfacher, da nicht mehrere Systeme mit sehr genau aufeinander abgestimmten Parametern realisiert werden müssen. Auch die numerische Analyse, auf die ich für dieses System nicht weiter eingehe, gestaltet sich etwas einfacher, da die Datenmenge deutlich reduziert wird.

Im Folgenden betrachte ich das Verhalten eines gerichteten Rings mit Zeitverzögerung in der Kopplung. Als experimentelles System dient wieder der Schmitt-Trigger, der mit einer digitalen Zeitverzögerungsplatine auf sich selbst zurückgekoppelt wird. Der Aufbau ist schematisch in Abbildung A.1 wiedergegeben. Am Eingang „E“ kann ein beliebiges Signal eingekoppelt werden, das mit einem Addierer zum



**Abbildung A.1.:** Schematischer Aufbau des Experiments mit zeitverzögerter Rückkopplung. E, A bezeichnen den Eingang bzw. Ausgang des Systems,  $\lambda$  die variable Kopplungsstärke und  $\tau$  die Verzögerungszeit, vgl. [Beck, 2009].



**Abbildung A.2.:** Frequenz der Autooszillationen für die Verzögerungszeiten  $\tau_1 = 8,33\mu s$ ,  $\tau_2 = 83,3\mu s$ . Die Oszillationsfrequenz sättigt gegen die Zeitskala der Verzögerungszeit, siehe [Beck, 2009].

zeitverzögerten Signal addiert und dann in den Schmitt-Trigger eingekoppelt wird. Das Ausgangssignal des Schmitt-Triggers wird an der Stelle „A“ über Operationsverstärkerschaltungen ausgekoppelt und von einer Transientenrekorderkarte aufgenommen. Dasselbe Signal wird auch an die Zeitverzögerungssplatinen weitergegeben, auf der es zuerst digitalisiert, dann durch einen FIFO<sup>1</sup> geleitet und schließlich wieder in ein analoges Signal übersetzt wird. Um den Digitalisierungsfehler zu minimieren, wird die ursprüngliche Flankenform mit einem Schmitt-Trigger wiederhergestellt, vgl.: [Beck, 2009]. Die Verzögerungszeit  $\tau$  kann mit Hilfe der externen Taktfrequenz der Zeitverzögerungsschaltung sowie der Festlegung der Registerlänge des FIFOs über einen weiten Bereich variiert werden. Das zeitverzögerte Signal wird dann mit der negativen Kopplungsstärke  $\lambda$  verstärkt und über den Addierer wieder auf den Schmitt-Trigger gegeben. Die zugehörige Differentialgleichung lautet:

$$\dot{x} = -\beta [x - \tanh(A\gamma x + A\lambda x_\tau + y)], \quad (\text{A.3})$$

wobei  $x_\tau$  die zeitverzögerte Komponente des Systems und  $y$  der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist.

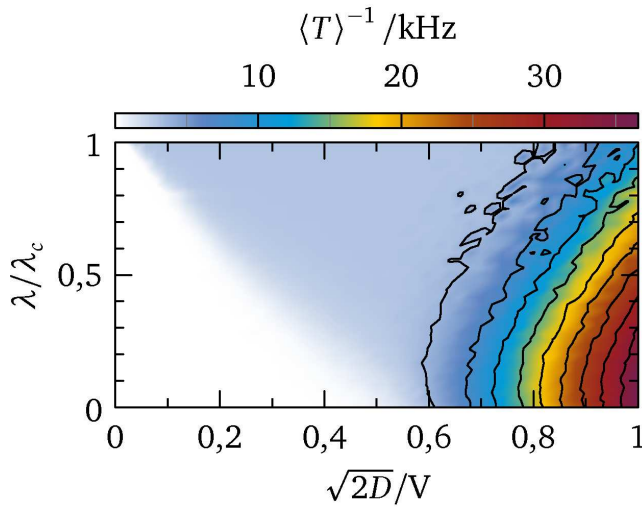
## A.1 Deterministische Dynamik

Wird die Stärke der Rückkopplung  $|\lambda|$  nach und nach erhöht, so findet wieder, genau wie auch in Abschnitt 3.1 gezeigt, eine Sattel-Knoten-Bifurkation des Fixpunktes statt. Dadurch entstehen auch im System mit Zeitverzögerung Autooszillationen. Die Frequenz dieser Autooszillationen hängt nicht mehr nur von den Systemparametern des Schmitt-Triggers ab, sondern auch von der Verzögerungszeit. Die Messdaten für zwei Verzögerungszeiten  $\tau_1 = 8,33\mu s$ ,  $\tau_2 = 83,3\mu s$  sind in Abbildung A.2 dargestellt. Der Verlauf für kleine Oszillationsfrequenzen ähnelt wieder dem aus Kapitel 3.2, mit dem Unterschied, dass die Sättigungsfrequenz nun nicht mehr durch die Parameter des Schmitt-Triggers gegeben ist, sondern in erster Linie durch die Verzögerungszeit. Bei langen Verzögerungszeiten können nicht nur die erwarteten periodischen Rechtecksignale auftreten sondern auch kompliziertere Signale. Abbildung A.3 zeigt exemplarisch mögliche Zeitreihen. Während in Teil a der Abbildung das Ausgangssignal ein einfaches Rechtecksignal ist, sieht man in Teil b zwar ebenfalls ein periodisches Signal, allerdings mit deutlich komplizierterem Verhalten. Das in b dargestellte Verhalten tritt auf, wenn in der Nähe der Bifurkation Fluktuationen den Schmitt-Trigger zum Umschalten bringen. Da dieses Umschalten „außer der Reihe“ wieder auf den Schmitt-Trigger rückgekoppelt wird, finden innerhalb einer Verzögerungszeit mehrere,

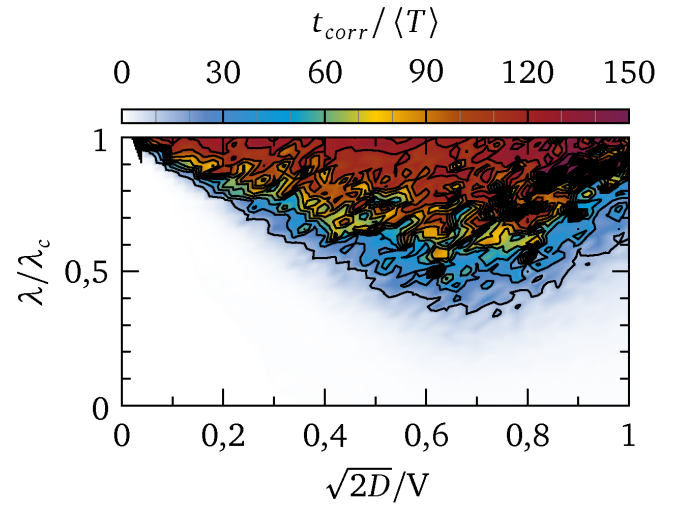
<sup>1</sup> Schieberegister, engl. *first in first out*



**Abbildung A.3.:** Zwei Zeitreihen des zeitverzögerten Systems jenseits des Bifurkationspunktes  $\lambda_c$ . In a) ist das erwartete, einfache Systemverhalten mit einem regelmäßigen, periodischen Rechtecksignal dargestellt. Die Zeitreihe in b) ist ebenfalls periodisch, allerdings zeigt das System deutlich komplizierteres Verhalten, aus: [Beck, 2009].



**Abbildung A.4.:** Kehrwert der mittleren Verweildauer  $\langle T \rangle$ , aufgetragen gegen Rauschstärke  $\sqrt{2D}$  und Kopplungsstärke  $\lambda$ , Verzögerungszeit  $\tau = 83,3 \mu\text{s}$ .

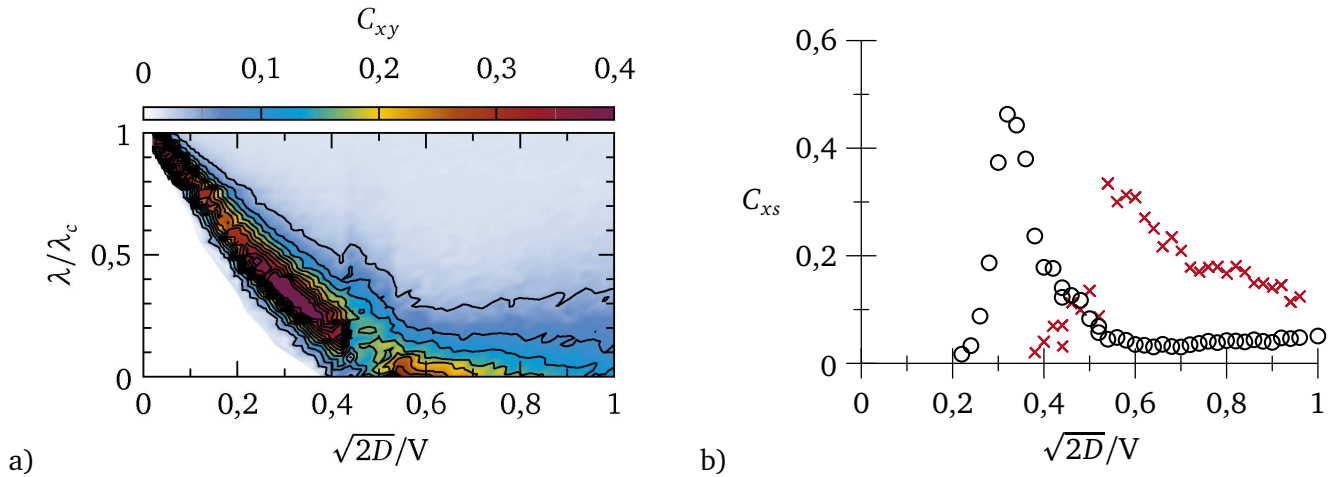


**Abbildung A.5.:** Normierte Autokorrelationszeit des zeitverzögert mit sich selbst gekoppelten Schmitt-Triggers aufgetragen gegen Rauschstärke  $\sqrt{2D}$  und Kopplungsstärke  $\lambda$ .

untereinander unkorrelierte Schaltvorgänge statt. Dasselbe Verhalten beobachtet man in Ringen aus vielen unidirektional gekoppelten Schmitt-Triggern: Dort können mehrere Stellen mit Frustration auftreten, die daraufhin um den Ring herumwandern. Ich verwende im Folgenden eine Verzögerungszeit von  $\tau = 83,3 \mu\text{s}$ , bei der diese Effekte nicht auftreten.

## A.2 Stochastische Dynamik

Wird in das System Rauschen eingekoppelt finde ich erneut verschiedene Effekte, die sich miteinander mischen können. Auf der einen Seite gibt es die im vorhergehenden Abschnitt gezeigte deterministische Dynamik, auf der anderen Seite erzeugt das Rauschen stochastische Übergänge. Der Kehrwert der mittleren Verweildauer  $\langle T \rangle$  ist in Abbildung A.4 gegen die Rauschstärke  $\sqrt{2D}$  und die Kopplungsstärke  $\lambda$  aufgetragen. Wie in Abbildung 3.8 befindet sich das Gebiet mit hauptsächlich stochastischer Dynamik am unteren Bildrand. Für endliche Kopplungsstärken erwarte ich, dass ein Wechselspiel zwischen deterministischer und stochastischer Dynamik stattfindet.



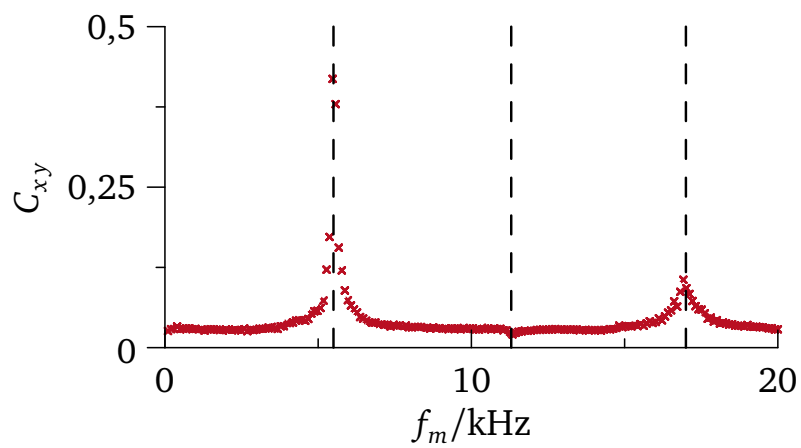
**Abbildung A.6.:** a) Gemessene Kreuzkorrelation zwischen dem System und dem Eingangssignal bei einer Antriebsfrequenz von  $f_m = 1$  kHz. Deutlich erkennt man ein lokales Maximum bei  $\lambda/\lambda_c \approx 0,3$  und  $\sqrt{2D} \approx 0,3$  V, bei dem die Kreuzkorrelation stärker als am unteren Bildrand (einzelnes Element) ist. b) Schnitt durch Teil a) bei festen Kopplungsstärken  $\lambda/\lambda_c = 0,3$  (schwarze Kreise) und  $\lambda/\lambda_c = 0$  (rote Kreuze). Die Korrelation bei endlicher Kopplungsstärke ist gegenüber der des Einzelements erhöht. Verzögerungszeit  $\tau = 83,3 \mu\text{s}$ .

### A.3 Kohärenzresonanz und stochastische Resonanz

Genau wie in Kapitel 3.4 betrachte ich nun die normierte Autokorrelationszeit des Systems, abhängig von der Rauschstärke  $\sqrt{2D}$  und der Kopplungsstärke  $\lambda$ . Das Ergebnis ist in Abbildung A.5 dargestellt. Deutlich ist ein Bereich erhöhter Autokorrelationszeit bei einer Rauschstärke von  $\sqrt{2D} \approx 0,5$  V zu erkennen. Das System zeigt also kurz vor der Sattel-Knoten-Bifurkation Kohärenzresonanz. Allerdings fehlt das in ausgedehnten Systemen vorhandene lokale Maximum bei relativ niedriger Kopplungsstärke, da die Fixpunkte, die das Verhalten hervorrufen, in diesem System fehlen. Genau wie in ausgedehnten Systemen tritt kurz vor der Sattel-Knoten-Bifurkation, die die Autooszillationen erzeugt, Kohärenzresonanz auf.

Auch im System mit einem einzelnen, auf sich selbst zeitverzögert rückgekoppelten Schmitt-Trigger findet man verbesserte stochastische Resonanz durch eine endliche Kopplungsstärke. Ein Teil der experimentellen Ergebnisse ist in Abbildung A.6 dargestellt. Am unteren Bildrand findet man stochastische Resonanz eines einzelnen Elements ohne Kopplung. Die Kreuzkorrelation kann bei endlicher Kopplungsstärke verbessert werden, etwa bei den Parameterwerten  $\lambda/\lambda_c \approx 0,3$  und  $\sqrt{2D} \approx 0,3$  V nimmt sie ein lokales Maximum an, wie man in Abbildung A.6b gut sehen kann.

Unter Variation der Antriebsfrequenz kann man ähnlich wie in ausgedehnten Systemen nichtmonotones Verhalten der Korrelationsfunktion beobachten. Eine Korrelationsfunktion ist exemplarisch in Abbildung A.7 dargestellt. Die mittlere Frequenz der Dynamik bei Kohärenzresonanz bei diesen Parametern ( $\lambda/\lambda_c = 0,48$  und  $\sqrt{2D} = 0,6$  V) beträgt  $f \approx 6$  kHz. Diese Frequenz entspricht dem Kehrwert der doppelten Verzögerungszeit. Dort ist in dieser Messung eine deutlich erhöhte Korrelation zwischen Signal und Antwort zu finden. Auch bei der dreifachen Frequenz finde ich dieses Maximum, bei der doppelten jedoch sogar ein Minimum. Dieses Minimum wird durch die negative Rückkopplung hervorgerufen, die Lage entspricht genau dem Kehrwert der Verzögerungszeit. Nach der Verzögerungszeit wird der inverse Zustand des Schmitt-Triggers auf diesen zurückgekoppelt. Ist zu diesem Zeitpunkt das Signal wieder im selben Zustand wie vor der Verzögerungszeit wirken das Antriebssignal und das zeitverzögerte Signal gegeneinander. Dieses Verhalten ist auch in Kapitel 4 zu beobachten. Dort wurde die stochastische Resonanz durch die Dynamik entlang der Mannigfaltigkeiten der frustrierten Fixpunkte unterdrückt.



**Abbildung A.7.:** Kreuzkorrelation zwischen Eingangssignal und Systemantwort in Abhängigkeit von der Antriebsfrequenz  $f_m$  bei  $\lambda/\lambda_c = 0,48$  und  $\sqrt{2D} = 0,6$  V. Unterbrochene senkrechte Linien: Vielfache des Kehrwerts der Verzögerungszeit  $\tau = 83,3 \mu\text{s}$ .





## B Bifurkationsanalysen

### B.1 Ring aus drei Schmitt-Triggern

Im Folgenden zeige ich die Rechnungen zur Bifurkationsanalyse der Fixpunkte des Rings aus drei Schmitt-Triggern. Die komponentenweisen Ableitungen des Systems sind:

$$\frac{df_i}{dx_i} = -\beta \left( 1 - \left[ 1 - \tanh^2 \left( A (\gamma x_i + \lambda x_{i-1}) \right) \right] \right) \cdot A\gamma \quad (\text{B.1a})$$

$$\frac{df_i}{dx_{i-1}} = \beta \left[ 1 - \tanh^2 \left( A (\gamma x_i + \lambda x_{i-1}) \right) \right] \cdot A\lambda \quad (\text{B.1b})$$

$$\frac{df_i}{dx_{i+1}} = 0 \quad (\text{B.1c})$$

Für die Bifurkationsanalyse benötige ich die Jacobimatrix des Gleichungssystems 2.2. Die Jacobimatrix besteht aus den Ableitungen der Komponenten von  $f(x)$  nach den Koordinaten  $x_i, i = 1, 2, 3$  an der Stelle  $x_0 : f(x_0) = 0$ . Aus der Bedingung für einen Fixpunkt  $\dot{x} = f(x_0) = 0$ , folgt mit den oben berechneten ersten Ableitungen:

$$\frac{df_i}{dx_i}(x_0) = -\beta \left[ 1 - (1 - x_i^2) \cdot A\gamma \right] \quad (\text{B.2a})$$

$$\frac{df_i}{dx_{i-1}}(x_0) = \beta \left[ (1 - x_i^2) \cdot A\lambda \right] \quad (\text{B.2b})$$

$$\frac{df_i}{dx_{i+1}}(x_0) = 0 \quad (\text{B.2c})$$

Mit der Ersetzung  $(1 - x_i^2)A = \Delta_i$  lassen sich die Ausdrücke noch weiter vereinfachen. Die Jacobimatrix des Gleichungssystems ist:

$$Df(x) = \beta \begin{pmatrix} \gamma\Delta_1 - 1 & 0 & \lambda\Delta_1 \\ \lambda\Delta_2 & \gamma\Delta_2 - 1 & 0 \\ 0 & \lambda\Delta_3 & \gamma\Delta_3 - 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

#### „Frustrierter“ Zustand

Zuerst analysiere ich die Bifurkationen der Fixpunkte, bei denen ein Element in einem anderen Zustand als die anderen ist, wie z. B.  $(\uparrow, \downarrow, \uparrow)$ . Ist  $(A\lambda) < 0$  und vom Betrag her „groß genug“<sup>1</sup>, so finde ich für die Komponenten  $x_2 \approx -1$  bzw.  $x_3 \approx 1$ . Am Bifurkationspunkt gilt, dass der Realteil eines Eigenwerts der Jacobimatrix einen Nulldurchgang haben muss. Die Jacobimatrix lautet:

$$Df(x_0) = \beta \begin{pmatrix} \gamma\Delta_1 - 1 & 0 & \lambda\Delta_1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

<sup>1</sup> was für die Parameterwerte des experimentellen Systems leicht erfüllt ist

Die Eigenwerte sind  $-\beta$  und  $\beta(\gamma\Delta_1 - 1)$ . Die erste Koordinate des Fixpunkts liegt bei  $x_c = \sqrt{1 - 1/A\gamma}$  (wegen  $\gamma\Delta_1 - 1 = 0$ ). Der Bifurkationspunkt ist  $\lambda_c = -\gamma x_c + 1/A \cdot \text{Artanh } x_c$ ; der zugehörige Eigenvektor ist  $\vec{v}_c = (1, 0, 0)^T$ . Das Zentralmannigfaltigkeitstheorem erlaubt nun, das Bifurkationsproblem eindimensional zu betrachten, vgl. auch [Guckenheimer und Holmes, 1983]. Der Argumentation in Kapitel 3.4 [Guckenheimer und Holmes, 1983] folgend, reicht es, für die Analyse der vermuteten Sattel-Knoten-Bifurkation die drei ersten Ableitungen des auf die Zentralmannigfaltigkeit projizierten Flusses zu betrachten, d.h. die Funktion

$$f_\lambda = \vec{v}_c^T \cdot f(\vec{v}_c^T \cdot x) = -\beta (x - \tanh(A\gamma x - A\lambda)).$$

Die entsprechenden Ableitungen lauten:

$$\left. \frac{df_\lambda}{dx}(x_c, \lambda_c) = -\beta [1 - A\gamma (1 - \tanh^2(A\gamma x - A\lambda))] \right|_{(x_c, \lambda_c)} = 0 \quad (\text{B.5a})$$

$$\left. \frac{d^2 f_\lambda}{dx^2}(x_c, \lambda_c) = -2\beta(A\gamma)^2 \tanh(A\gamma x - A\lambda) [1 - \tanh^2(A\gamma x - A\lambda)] \right|_{(x_c, \lambda_c)} = -2\beta A\gamma x_c \neq 0 \quad (\text{B.5b})$$

$$\left. \frac{df_\lambda}{d\lambda}(x_c, \lambda_c) = \beta A x [1 - \tanh^2(A\gamma x - A\lambda)] \right|_{(x_c, \lambda_c)} = -\frac{\beta x_c}{\gamma} \neq 0 \quad (\text{B.5c})$$

Die resultierende Normalform lautet (mit  $\delta x = x - x_c$ ):

$$\dot{\delta x} = -2\beta A\gamma x_c (\delta x)^2 - \frac{\beta x_c}{\gamma} (\lambda - \lambda_c) \quad (\text{B.6})$$

Die Kurve der Fixpunkte im Unterraum  $(1, 0, 0)^T \times \mathbb{R}$  ist daher quadratisch tangential zur Linie  $\lambda = \lambda_c$  und liegt lokal auf einer Seite dieser Linie. Es liegt demnach wie vermutet eine Sattel-Knoten-Bifurkation an dieser Stelle vor. Diese findet gleichzeitig für alle anderen äquivalenten Zustände (ein Element in einem anderen Zustand als die beiden anderen) statt. Diese Zustände sind vor der Bifurkation durch ihre Zentralmannigfaltigkeiten verbunden, d.h. sie liegen auf einem Ring. Findet nun die Sattel-Knoten-Bifurkation statt (bei allen Fixpunkten gleichzeitig), so entsteht eine anziehende Grenzzyklus-Separatrix, vgl. [Anishchenko u. a., 2002].

Dieselbe Konfiguration ( $\uparrow, \downarrow, \uparrow$ ) bei positiver Kopplungsstärke verhält sich folgendermaßen: Die erste Komponente ist nahe bei +1, für die anderen beiden gilt:  $|x_3| < |x_2|$ , was man an den Komponenten von  $f$  ablesen kann. Es findet wieder eine Sattel-Knoten-Bifurkation statt, allerdings diesmal beim zweiten Element, so dass das System in den Zustand ( $\uparrow, \uparrow, \uparrow$ ) übergeht. Sind zwei Elemente negativ und eines positiv, schaltet das System in den Zustand ( $\downarrow, \downarrow, \downarrow$ ).

## Der Ursprung

Die Stabilität des trivialen Fixpunktes  $(0, 0, 0)$  ist wichtig für die Systemdynamik. Die Jacobimatrix lautet hier:

$$Df(x=0) = \beta \begin{pmatrix} A\gamma - 1 & 0 & A\lambda \\ A\lambda & A\gamma - 1 & 0 \\ 0 & A\lambda & A\gamma - 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Die Eigenwerte sind:

$$\Lambda_0 = \beta (A\lambda + A\gamma - 1) \quad (\text{B.8a})$$

$$\Lambda_1 = \beta \left( A\gamma - 1 - \frac{A\lambda}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} A\lambda \right) \quad (\text{B.8b})$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_1^* \quad (\text{B.8c})$$

Die zugehörigen Eigenrichtungen lauten:

$$\vec{u} = (1, 1, 1)^T \quad (\text{B.9a})$$

$$\vec{v}_1 = (e^{i2\pi/3}, 1, e^{-i2\pi/3})^T \quad (\text{B.9b})$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1^* \quad (\text{B.9c})$$

Der Realteil des ersten Eigenwerts wechselt an der Stelle  $\lambda_{c,0} = 1/A - \gamma$  sein Vorzeichen, die Eigenrichtung  $\vec{u}$  wird bei Verringerung der Kopplungsstärke stabil. Der Realteil des zweiten (bzw. dritten) Eigenwerts dagegen wechselt bei  $\lambda_{c,1} = 2\gamma - 1/A$  sein Vorzeichen. Bei Erhöhung der Kopplungsstärke über diesen Wert hinaus werden die Eigenrichtungen  $\vec{v}_{1,2}$  stabil. Das Verhalten wechselt also von einem stabilen Fokus mit instabiler Richtung  $\vec{u}$  bei großer Kopplungsstärke über einen vollständig instabilen Fokus bei einer Kopplungsstärke zwischen  $2\gamma - 1/A > \lambda > 1/A - \gamma$  bis zu einem instabilen Fokus mit anziehender Richtung  $\vec{u}$ .

Zuerst betrachte ich die Bifurkation bei  $\lambda_{c,0} = 1/A - \gamma$ . Die nichthyperbolische Eigenrichtung ist hier  $\vec{u}$ . Die Systemdynamik in dieser Zentralmannigfaltigkeit lautet:

$$f_\lambda(x) = -\beta [x_0 - \tanh(A(\gamma + \lambda)x)] \quad (\text{B.10})$$

Erneut betrachte ich verschiedene partielle Ableitungen der Funktion  $f_\lambda(x)$  an der Stelle  $(0, \lambda_{c,0})$ .

$$f_{\lambda_{c,0}}(0) = 0$$

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}(0, \lambda_{c,0}) = A\beta x \frac{1}{\cosh^2(A(\gamma + \lambda)x)} \Big|_{(0, \lambda_{c,0})} = 0$$

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x}(0, \lambda_{c,0}) = -\beta \left[ 1 - A(\gamma + \lambda) \left( 1 - \tanh^2(A(\gamma + \lambda)x) \right) \right] \Big|_{(0, \lambda_{c,0})} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x \partial \lambda}(0, \lambda_{c,0}) = A\beta \left( 1 - \tanh^2(A(\gamma + \lambda)x) \right) \left( 1 - 2A(\gamma + \lambda)x \tanh(A(\gamma + \lambda)x) \right) \Big|_{0, \lambda_{c,0}} = A\beta$$

$$\frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x^2}(0, \lambda_{c,0}) = -2A\beta (A(\gamma + \lambda))^2 \tanh(A(\gamma + \lambda)x) \left( 1 - \tanh^2(A(\gamma + \lambda)x) \right) \Big|_{(0, \lambda_{c,0})} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f_\lambda}{\partial x^3}(0, \lambda_{c,0}) = -2A\beta (A(\gamma + \lambda))^3 \left[ 1 - \tanh^2(A(\gamma + \lambda)x) \right] \left[ 1 - 3 \tanh^2(A(\gamma + \lambda)x) \right] \Big|_{0, \lambda_{c,0}} = -2\beta A$$

Hieraus resultiert die Normalform

$$\dot{x} = A\beta x (\lambda - \lambda_{c,0}) - 2\beta A x^3. \quad (\text{B.12})$$

Es liegt also, wie aus der Symmetrie des Systems erwartet, eine Heugabelbifurkation vor.

Beim anderen Bifurkationspunkt wechselt der Realteil des komplex-konjugierten Eigenwertpaars das Vorzeichen. Die Komponenten der Funktion  $f$  haben Punktsymmetrie um den Bifurkationspunkt, die Unterräume sind komplexwertig. Zur Normalformanalyse dieser Bifurkation untersuche ich die Projektion von  $f$  auf den Unterraum der Zentralmannigfaltigkeit  $z \cdot \vec{v}_2 + z^* \cdot \vec{v}_3$ . Aus der Differentialgleichung  $\dot{x} = f(x)$  wird:

$$\dot{z} = \vec{v}_1^T f(z \cdot \vec{v}_1 + z^* \cdot \vec{v}_2) \quad (\text{B.13})$$

Ich betrachte hier nur Terme der ersten beiden nicht verschwindenden Ordnungen. Da der  $\tanh(\cdot)$  eine ungerade Funktion ist, benötige ich die Terme der ersten und dritten Ordnung. Die Rechnung wird

deutlich übersichtlicher, wenn man sie direkt mit den Lyapunovexponenten  $\Lambda_{1,2}$  ausdrückt. Nach einigen Umformungen finde ich

$$\dot{z} = -3\Lambda_1 z + \frac{3}{\beta^3} (\Lambda_2 - \beta)^2 (\Lambda_1 - \beta) z^* z z, \quad (\text{B.14})$$

was direkt die Normalform einer Hopf-Bifurkation ist. An den Vorzeichen der Realteile lassen sich mehrere Dinge ablesen:

Das Vorzeichen des Realteils des ersten Terms bestimmt die Stabilität des untersuchten Fixpunkts. Wir sehen, dass er bei Erhöhung des Kontrollparameters von instabil nach stabil wechselt. Der Realteil des zweiten Terms ist am Bifurkationspunkt negativ, das bedeutet, dass vor der Bifurkation ein stabiler Orbit um den Ursprung existiert. Allerdings wechselt der Realteil sein Vorzeichen beim Wert  $\lambda = 2\gamma$ .

### Vollständig geordnetes System

Nun betrachte ich die Fixpunkte, bei denen alle Teilsysteme im selben Zustand aber nicht Null sind, also die Fixpunkte  $(\uparrow, \uparrow, \uparrow)$  und  $(\downarrow, \downarrow, \downarrow)$ . Wenn die Kopplungsstärke  $\lambda$  größer als Null ist sind die stabilen Punkte ziemlich genau bei  $\pm 1$ , wodurch die kleine Abweichung  $\Delta_i$  verschwindet. Der Jacobimatrix kann man also direkt ansehen, dass diese Zustände stabil sind, da nur die Terme  $-\beta$  auf der Hauptdiagonalen übrigbleiben. Die Fixpunkte sind also aus allen Richtungen anziehend.

Ist die Kopplungsstärke negativ müssen die Eigenwerte der Matrix genauer betrachtet werden. Die Eigenwerte lauten mit  $\Delta_i = \Delta$ :

$$\Lambda_0 = \beta (\lambda \Delta + \gamma \Delta - 1) \quad (\text{B.15a})$$

$$\Lambda_1 = \beta \left( \gamma \Delta - 1 - \frac{\lambda \Delta}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \Delta \right) \quad (\text{B.15b})$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_1^*. \quad (\text{B.15c})$$

Die zugehörigen Eigenrichtungen sind:

$$\vec{u} = (1, 1, 1)^T \quad (\text{B.16a})$$

$$\vec{v}_1 = (e^{i2\pi/3}, 1, e^{-i2\pi/3})^T \quad (\text{B.16b})$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1^* \quad (\text{B.16c})$$

Der Nulldurchgang des ersten (reellen) Eigenwerts findet bei der Kopplungsstärke

$$\lambda_0 = \frac{1}{A(1 - x_0^2)} - \gamma$$

statt. Eingesetzt in die Bedingung  $f(x_0) = 0$  erhalte ich für die Fixpunkte  $x_0 = 0$ . Wenn ich den Realteil des zweiten bzw. dritten Eigenwertes betrachte folgt auch der Ursprung als Fixpunkt für die untersuchte Bifurkation. Eine Untersuchung der Eigenwerte liefert also dieselben Bifurkationspunkte wie für den Zustand  $(0, 0, 0)$ .

## B.2 Verallgemeinerung $d$ -dimensionaler Systeme

Wie sich herausgestellt hat, sind für die in dieser Arbeit untersuchten Effekte nur wenige der in den Systemen vorhandenen Fixpunkte wichtig. Dies sind zum einen der Phasenraumursprung, zum anderen

Fixpunkte mit Störungen. Bei der Analyse des Ursprungs findet man für die Jacobimatrix mit der in Kapitel 3 verwendeten Notation:

$$Df = \beta \begin{pmatrix} A\gamma & 0 & \cdots & 0 & A\lambda \\ A\lambda & A\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A\lambda & A\gamma \end{pmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Die Eigenwerte lauten:

$$\Lambda_j = -\beta A(\gamma + \lambda e^{i\frac{2\pi}{d} \cdot j}), \quad j = 1, \dots, d \quad (\text{B.18})$$

Die  $l$  Komponenten der zugehörigen Eigenvektoren  $(v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,d})^T$  sind

$$v_{j,l} = e^{-i\frac{2\pi}{d} \cdot j} \cdot v_{j,l-1}, \quad j, l = 1, \dots, d. \quad (\text{B.19})$$

Es existiert also in jedem Fall eine gerichtete dynamische Komponente um den Ursprung. Bei der Betrachtung von Elementen im frustrierten Zustand hat es sich in Kapitel 5 gezeigt, dass bei einer Folge von mehreren frustrierten Elementen das letzte Element dieser Reihe seine Stabilität zuerst verliert. Auf Grund der Systemgeometrie gilt das auch für beliebig große Ringe. Die Besetzungswahrscheinlichkeit dieser Fixpunkte wird also selbst wenn sich das System unterhalb des Bifurkationspunktes befindet relativ klein sein. Bevorzugt sind Konfigurationen mit möglichst wenigen Störungen, die möglichst weit auseinander liegen. Diese Fixpunkte verlieren durch u. U. mehrere gleichzeitig auftretende Sattel-Knoten-Bifurkationen ihre Stabilität. Bei Systemen mit einer ungeraden Zahl von Elementen entsteht ein stabiler Grenzzyklus, Systeme mit einer geraden Zahl von Elementen laufen spiralförmig auf den Ursprung zu und werden von diesem in Richtung der Fixpunkte mit alternierend angeordneten Elementen abgelenkt.

Die oben beschriebene Dynamik um den Phasenraumursprung führt in diesen Systemen zu Kohärenzresonanz sowie zur verstärkten stochastischen Resonanz bei bestimmten, ungefähr der Umlauffrequenz entsprechenden, Antriebsfrequenzen.



---

# Literaturverzeichnis

- [Analog Devices 2009] Analog Devices (Veranst.): *Datenblatt des AD711JN*. 2009
- [Anishchenko u. a. 2002] ANISHCHENKO, S. ; ASTAKHOV, V. ; NEIMAN, B. ; VADISOVA, E. ; SHIMANSKY-GEIER, L.: *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems*. Springer-Verlag, 2002
- [Anishchenko u. a. 1992] ANISHCHENKO, V.S. ; SAFONOVA, M.A. ; CHUA, Leon O.: Stochastic Resonance in the Nonautonomous Chua's Circuit / EECS Department, University of California, Berkeley. URL <http://www.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/1992/2037.html>, 1992 (UCB/ERL M92/51). – Forschungsbericht
- [Arnold 2003] ARNOLD, L.: *Random dynamical systems*. Springer-Verlag, 2003
- [Barbay u. a. 2001] BARBAY, S. ; GIACOMELLI, G. ; MARIN, F.: Noise assisted transmission of information: Theory and experiment. In: *Phys. Rev. E* 63 (2001)
- [Beck 2009] BECK, S.: *Kohärenzresonanz in zeitverzögerten Systemen*, TU Darmstadt, B.Sc.-Arbeit, 2009
- [Benzi u. a. 1982] BENZI, R. ; PARISI, G. ; SUTERA, A. ; VULPIANI, A.: Stochastic resonance in climatic change. In: *Tellus* 24 (1982)
- [Benzi u. a. 1981] BENZI, R. ; SUTERA, A. ; VULPIANI, A.: The mechanism of stochastic resonance. In: *J. Phys. A* 14 (1981)
- [Bulsara u. a. 1991] BULSARA, A. ; JACOBS, E.W. ; ZHOU, T. ; MOSS, F. ; KISS, L.: Stochastic resonance in a single neuron model: theory and analog simulation. In: *J Theor Biol.* 152 (1991)
- [Bulsara u. a. 2004] BULSARA, Adi R. ; IN, Visarath ; KHO, Andy ; LONGHINI, Patrick ; PALACIOS, Antonio ; RAPPEL, Wouter-Jan ; ACEBRON, Juan ; BAGLIO, Salvatore ; ANDO, Bruno: Emergent oscillations in unidirectionally coupled overdamped bistable systems. In: *Phys. Rev. E* 70 (2004)
- [Collins u. a. 1997] COLLINS, J. J. ; IMHOFF, Thomas T. ; GRIGG, Peter: Noise-mediated enhancements and decrements in human tactile sensation. In: *Phys. Rev. E* 56 (1997), Jul, Nr. 1, S. 923–926
- [Davidson 2006] DAVIDSON, Eric H.: *The Regulatory Genome: Gene Regulatory Networks in Development and Evolution*. Academic Press Burlington MA, 2006. – ISBN 9780120885633
- [Diestelhorst 2005] DIESTELHORST, M.: Chaos and Stochastic Resonance in Ferroelectrics – Two Effects Related to Switching. In: *Ferroelectrics* 316 (2005)
- [Fauve und Heslot 1983] FAUVE, S. ; HESLOT, F.: Stochastic resonance in a bistable system. In: *Phys. Lett. A* 97 (1983)
- [Gammaitoni u. a. 1998] GAMMAITONI, L. ; HÄNGGI, P. ; JUNG, P. ; MARCHESONI, F.: Stochastic Resonance. In: *Rev. Mod. Phys.* 70 (1998)
- [Garcia-Ojalvo u. a. 2004] GARCIA-OJALVO, J. ; ELOWITZ, M.B. ; STROGATZ, S.H.: Modeling a synthetic multicellular clock: repressilators coupled by quorum sensing. In: *Proc Natl Acad Sci USA* 101 (2004)
- [Gardiner 1990] GARDINER, C. W.: *Handbook of Stochastic Methods*. Springer-Verlag Berlin, 1990

- 
- [Guckenheimer und Holmes 1983] GUCKENHEIMER, J. ; HOLMES, P.: *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag Berlin, 1983
- [H. A. Kramers 1940] H. A. KRAMERS: Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. In: *Physica* 7 (1940), Nr. 4, S. 284 – 304. – ISSN 0031-8914
- [Jüngling u. a. 2008] JÜNGLING, T. ; STEMLER, T. ; JUST, W. ; BENNER, H.: Noise-free stochastic resonance at an interior crisis. In: *Phys. Rev. E* 77 (2008)
- [Kloeden und Platen 1992] KLOEDEN, E. ; PLATEN, E.: *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer-Verlag Berlin, 1992
- [Leonard und Reichl 1994] LEONARD, David S. ; REICHL, L. E.: Stochastic resonance in a chemical reaction. In: *Phys. Rev. E* 49 (1994), Feb, Nr. 2, S. 1734–1737
- [Lindner u. a. 1995] LINDNER, J. F. ; MEADOWS, B. K. ; DITTO, W. L. ; INCHIOSA, M. E. ; BULSARA, A. R.: Array enhanced stochastic resonance and spatiotemporal synchronization. In: *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995)
- [Lindner u. a. 2006] LINDNER, John F. ; BENNETT, Matthew ; WIESENFELD, Kurt: Potential energy landscape and finite-state models of array-enhanced stochastic resonance. In: *Phys. Rev. E* 73 (2006), Mar, Nr. 3, S. 031107
- [Masoller 2002] MASOLLER, C.: Noise-Induced Resonance in Delayed Feedback Systems. In: *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002), Jan, Nr. 3, S. 034102
- [McNamara und Wiesenfeld 1989] MCNAMARA, B. ; WIESENFELD, K.: Theory of stochastic resonance. In: *Phys. Rev. A* 39 (1989)
- [Mori und Kai 2002] MORI, Toshio ; KAI, Shoichi: Noise-Induced Entrainment and Stochastic Resonance in Human Brain Waves. In: *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002), May, Nr. 21, S. 218101
- [Neiman u. a. 1997] NEIMAN, Alexander ; SAPARIN, Peter I. ; STONE, Lewi: Coherence resonance at noisy precursors of bifurcations in nonlinear dynamical systems. In: *Phys. Rev. E* 56 (1997), Jul, Nr. 1, S. 270–273
- [Norrell u. a. 2007] NORRELL, Johannes ; SAMUELSSON, Björn ; SOCOLAR, Joshua E. S.: Attractors in continuous and Boolean networks. In: *Phys. Rev. E* 76 (2007), Oct, Nr. 4, S. 046122
- [Palacios u. a. 2006] PALACIOS, A. ; AVEN, J. ; LONGHINI, P. ; IN, V. ; BULSARA, A.: Cooperative dynamics in coupled noisy dynamical systems near a critical point: The dc superconducting quantum interference device as a case study. In: *Phys. Rev. E* 74 (2006)
- [Pikovsky und Kurths 1997] PIKOVSKY, A. ; KURTHS, J.: Coherence Resonance in a Noise-Driven Excitable System. In: *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997)
- [Reibold u. a. 1997] REIBOLD, E. ; JUST, W. ; BECKER, J. ; BENNER, H.: Stochastic resonance in chaotic spin-wave dynamics. In: *Phs. Re. Lett.* 78 (1997)
- [Riskin 1989] RISKIN, H.: *The Fokker-Planck Equation*. Springer-Verlag Berlin, 1989
- [Rozenfeld und Schimansky-Geier 2000] ROZENFELD, R. ; SCHIMANSKY-GEIER, L.: Array-enhanced stochastic resonance in finite systems. In: *Chaos, Solitons & Fractals* 11 (2000), Nr. 12, S. 1937 – 1944. – ISSN 0960-0779



- 
- [Russell u. a. 1999] RUSSELL, David F ; WILKENS, Lon A. ; MOSS, Frank: Use of behavioural stochastic resonance by paddle fish for feeding. In: *Nature* 402 (1999). – URL <http://dx.doi.org/10.1038/46279>
- [Simonotto u. a. 1997] SIMONOTTO, Enrico ; RIANI, Massimo ; SEIFE, Charles ; ROBERTS, Mark ; TWITTY, Jennifer ; MOSS, Frank: Visual Perception of Stochastic Resonance. In: *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997), Feb, Nr. 6, S. 1186–1189
- [Stemler u. a. 2004] STEMLER, T. ; SCHEUERMANN, M. ; BENNER, H.: Spatiotemporal stochastic resoance in an array of Schmitt-Triggers. In: *SPIE Proc.* 5471 (2004)
- [Werner u. a. 2008] WERNER, J. P ; STEMLER, T. ; BENNER, H.: Crisis and stochastic resonance in Shinriki's circuit. In: *Physica D* 237 (2008)



---

# Nomenklatur

$x, y$	Systemvariablen, Vektor oder Skalar
$\lambda$	Kopplungsstärke
$\lambda_c$	Kopplungsstärke, bei der Autooszillationen auftreten
$dW_t$	Erzeugende des Wienerprozesses bzw. Brownsche Bewegung
$D$	Rauschstärke
$\omega$	Frequenz eines Signales
$n_{\pm}, n_{\pm}^{(i)}$	Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem diskreten System
$w_{\pm}$	Übergangswahrscheinlichkeiten
$C_{xy}(\Delta t)$	Kreuzkorrelationsfunktion zwischen $x(t)$ und $y(t)$ in Abhängigkeit von der Zeitverschiebung $\Delta t$ ,
$C_{xy}$	„Kreuzkorrelation“, genauer: Amplitude der Kreuzkorrelationsfunktion
$C_{xx}$	Autokorrelationsfunktion
$s(t)$	zeitabhängiges Signal
$\xi_t$	weißes, gaußsches Rauschen
$Df$	Jacobimatrix des (Vektor-)feldes $f$
$\Lambda$	Lyapunovexponent
$\partial_x, \partial_t$	partielle Ableitung nach $x$ bzw. $t$
$p$	Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung
$T_m, f_m$	Modulationsperiode und -frequenz
$T$	Verweildauer in einem Zustand
$\langle T \rangle$	mittlere Verweildauer in einem Zustand
$N(\mu, \sigma)$	Normalverteilung mit Mittelwert $\mu$ und Standardabweichung $\sigma$
$R = \frac{\langle T^2 \rangle^{1/2}}{\langle T \rangle}$	Normierte Standardabweichung der Verweildauern, Maß für Kohärenzresonanz



---

# Lebenslauf

## Angaben zur Person

Diplom-Physiker Johannes Werner  
Geburtsdatum 2. Januar 1979 in Alzenau i. Ufr.  
Familienstand ledig

## Schulbildung

08/1985–06/1989 Grundschule in Rodgau / Nieder-Roden  
08/1989–07/1998 Weiterführende Schule (Gymnasium) in Seligenstadt (Hessen),  
Abschluss: Abitur, Leistungskurse: Mathematik und Physik, Abschlussnote: 1,7

## Grundwehrdienst

11/1998–08/1999 Waffenmechaniker in Mainz

## Akademische Laufbahn

10/1999–04/2005 Physikstudium an der Technischen Universität Darmstadt (TUD),  
Abschluss: Diplom-Physiker, Note: sehr gut.  
Titel der Arbeit: „Stochastische Resonanz an einer Attraktorverschmelzkrise“  
09/2002–05/2003 DAAD Stipendium, Aufenthalt an der University of Saskatchewan, Saskatoon,  
Kanada  
seit 05/2005 Promotion an der TUD, Arbeitsgruppe von Herrn Prof. Dr. H. Benner, Thema: Raum-  
zeitliche Strukturbildung in zeitverzögerten ausgedehnten Systemen mit Rauschen

## Wissenschaftlicher Mitarbeiter

05/2005–08/2009 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Festkörperphysik, TUD



---

# Danksagung

Mein Dank gilt zuallererst Herrn Prof. Dr. Hartmut Benner, der es mir ermöglicht hat, in seiner Arbeitsgruppe diese Arbeit durchzuführen. In vielen Diskussionen hat er mir stets geduldig geholfen, diese Arbeit in die richtige Richtung zu lenken.

Herrn Dr. Wolfram Just und Herrn Asst.-Prof. Dr. Thomas Stemler danke ich für ihre kritischen Fragen und Anregungen.

Den Mitgliedern der AG Benner danke ich für die vielen fachlichen und nichtfachlichen Gespräche und die gemeinsamen Veranstaltungen. Ganz besonders herzlich danke ich meinem Kollegen, Freund und Büromitbewohner Dr. Clemens von Loewenich. Die gemeinsame Entwicklungsarbeit, die gegenseitigen Erklärungsversuche und viele Unterhaltungen sind ein wichtiger Teil der letzten Jahre gewesen, die ich nicht missen möchte. Dank gilt auch Sönke Beck, dessen B. Sc.-Arbeit wichtige Vorarbeiten für einen Teil dieser Arbeit (zeitverzögerte Systeme) beinhaltet hat.

Den Arbeitsgruppen von Prof. Dr. Barbara Drossel, Prof. Dr. N. Grewe und Prof. Dr. M. Porto danke ich für die Rechenzeit auf dem FKP-Cluster als parasitärer Nutzer und den zuständigen Administratoren für die Geduld.

Mein Dank geht an meine Familie, besonders an meine Freundin Petra Witteck, die mich besonders in der Endphase dieser Arbeit unterstützt und immer wieder ermutigt haben.

Desweiteren danke ich allen, die mich ertragen und Korrektur gelesen haben und noch immer mit mir reden, insbesondere Svenja Troßbach und Hans-Peter Schütte.





---

# Erklärung zur Dissertation

Hiermit versichere ich, die vorliegende Dissertation ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 9. Februar 2010

---

(J. Werner)